Институтъ Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

КУРСЪ

АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ.

Д. А. Граве,

Преподавателя Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I
и приватъ-доцента Императорскаго С.-Петербургскаго университета.

Съ 262 рис. въ текстѣ и 1 листомъ чертежей.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая, № 9.
1893.

Печатано по распоряженію Института инженеровъ путей сообщенія
Императора АЛЕКСАНДРА I.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Современная педагогическая литература по аналитической геометріи достаточно богата; не говоря уже о классическихъ руководствахъ на иностранныхъ языкахъ: Salmon, Briot et Bouquet, Lefebure de Fourcy и др., мы и на русскомъ языкѣ имѣемъ рядъ прекрасныхъ самостоятельныхъ курсовъ Брашмана, Сомова, Фролова, Ващенко-Захарченко, Андреева. Издавая новый курсъ по аналитической геометріи, необходимо сказать поэтому о немъ нѣсколько словъ. Настоящая книга обязана своимъ появленіемъ просвѣщенному вниманію начальства института инженеровъ Путей Сообщенія къ научнымъ нуждамъ учащихся, проявляющемуся въ щедромъ доставленіи средствъ къ изданію руководствъ по читаемымъ въ институтѣ предметамъ. Особенную благодарность я долженъ выразить Его Превосходительству г. директору института Михаилу Николаевичу Герсеванову за вниманіе къ моему труду, выразившееся въ совѣтѣ дополнить мое руководство прибавленіемъ статей, хотя-бы и не излагаемыхъ на лекціяхъ въ институтѣ, но могущихъ быть полезными для желающихъ ближе ознакомиться съ предметомъ. Слѣдуя этому совѣту, я ввелъ, при печатаніи моей книги, въ употребленіе два шрифта; причемъ крупнымъ шрифтомъ напечатаны статьи, обязательныя для изученія по программѣ института, мелкимъ же шрифтомъ напечатаны добавленія, причемъ въ общемъ объемѣ ихъ я старался подойти къ программамъ, принятымъ въ высшихъ спеціальныхъ заведеніяхъ Франціи. Что касается основной части моего курса, а именно, теоріи линій и поверхностей второго порядка, то этой теоріи я придалъ новое изложеніе, простоту и практическія удобства котораго я имѣлъ возможность оцѣнить при производствѣ репетицій со студентами института. Этотъ новый способъ есть не что иное, какъ подробное примѣненіе сокращеннаго способа, основанное на извѣстномъ преобразованіи квадратичной формы при помощи выдѣленія квадратовъ линейныхъ функцій.

Д. Граве.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Геометрія двухъ измѣреній.

Эллипсъ.

Гипербола.

Фокусы и директрисы.

Общія свойства коническихъ сѣченій.

Объ алгебраическихъ кривыхъ высшихъ порядковъ и о кривыхъ трансцендентныхъ.

Геометрія трехъ измѣреній.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

Геометрія двухъ измѣреній.

1. Аналитическая геометрія имѣетъ своимъ предметомъ изученіе свойствъ линій и поверхностей, основанное на опредѣленіи ихъ при помощи алгебраическихъ уравненій, и даетъ общій способъ для рѣшенія геометрическихъ вопросовъ при помощи алгебры.

Сперва мы будемъ заниматься разсмотрѣніемъ плоскихъ фигуръ, а потомъ перейдемъ къ изученію фигуръ въ пространствѣ.

Въ основѣ аналитической геометріи лежитъ предложенный Декартомъ способъ опредѣленія положенія точки на плоскости и въ пространствѣ при помощи нѣкоторыхъ чиселъ называемыхъ координатами.

Прямолинейныя координаты.

2. Начнемъ съ наиболѣе простаго и употребительнаго способа опредѣленія положенія точки на плоскости. Задаются двѣ прямыя OX и OY, пересѣкающіяся въ нѣкоторой точкѣ O (см. черт. 1).

Эти прямыя называются осями. Оси, продолженныя неопредѣленно въ обѣ стороны отъ точки O дѣлятъ плоскость на четыре вертикальныхъ угла.

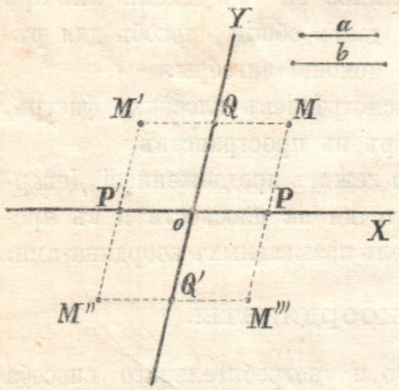
Положеніе всякой точки M въ одномъ изъ указанныхъ угловъ можетъ быть опредѣлено слѣдующимъ образомъ:

Черт. 1.

Изъ точки M проводимъ двѣ прямыя MP и MQ, параллельныя осямъ OY и OX. Пусть эти прямыя пересѣкутъ оси въ нѣкоторыхъ двухъ точкахъ P и Q, тогда мы получимъ на осяхъ два отрѣзка OP и OQ.

Относительно отрѣзковъ можно замѣтить, что ихъ длины опредѣляются вполнѣ заданіемъ точки M, но заданіе длины отрѣзковъ на осяхъ еще не опредѣляетъ вполнѣ соотвѣтственной точки на плоскости.

Въ самомъ дѣлѣ пусть будутъ заданы двѣ длины a и b; найдемъ точку, для которой отрѣзками на осяхъ OX и OY были бы заданныя длины a и b. Для указанной цѣли отложимъ по обѣ стороны точки O на оси OX отрѣзки OP и OP' равные a, точно также на оси OY два отрѣзка OQ и $Q'O$ равныхъ b (см. черт. 2). Получаются четыре точки P, P', Q, Q', черезъ которыя проводимъ прямыя, параллельныя осямъ; эти прямыя образуютъ параллелограмъ $M\,M'\,M''\,M'''$ въ вершинахъ котораго лежатъ точки M, M', M'', M''' съ одинаковыми отрѣзками на осяхъ: съ отрѣзкомъ равнымъ a на оси OX и съ отрѣзкомъ b на оси OY.



Черт. 2.

Итакъ, мы видимъ, что положеніе точки не опредѣляется вполнѣ длиною двухъ отрѣзковъ на осяхъ. Каждой парѣ отрѣзковъ соотвѣтствуютъ четыре точки въ разныхъ вертикальныхъ углахъ.

Для того чтобы опредѣлить положеніе точки на плоскости вполнѣ, необходимо кромѣ заданія длины отрѣзковъ на осяхъ прибавить всякій разъ, въ которомъ изъ вертикальныхъ угловъ лежитъ точка.

Для избѣжанія указанія угла, подобно тому какъ дѣлается въ тригонометріи, присоединяютъ къ отрѣзкамъ на осяхъ знаки плюсъ или минусъ.

Въ каждомъ вопросѣ на осяхъ выбираются разъ на всегда положительныя направленія.

Условимся во всѣхъ нашихъ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ на горизонтальной оси OX выбирать направленіе отъ точки O направо, положительное же направленіе оси OY вверхъ отъ оси OX.

Если отрѣзокъ OP точки M (см. черт. 2) лежитъ съ положительной стороны оси относительно точки O, то принято присоединять къ числу, выражающему длину этого отрѣзка знакъ $+$ и наоборотъ, если отрѣзокъ лежитъ на отрицательной сторонѣ оси, какъ это имѣетъ мѣсто, напр. относительно точекъ M' и M'', тогда присоединяютъ къ длинѣ отрѣзка знакъ минусъ. Тоже самое, производится надъ отрѣзками на оси OY. Длины отрѣзковъ съ приписаннымъ къ нимъ тѣмъ или другимъ знакомъ представляютъ тѣ количества, при помощи которыхъ мы будемъ опредѣлять положеніе точки на плоскости.

3. Длина отрѣзка на оси OX для нѣкоторой точки M, взятая съ соотвѣтственнымъ знакомъ, называется обыкновенно *абсциссою* точки M и обозначается буквою x; длина же отрѣзка на оси OY, взятая съ соотвѣтственнымъ знакомъ называется *ординатою* точки и обозначается буквою y.

Количества x и y называются *прямолинейными координатами точки* M. Оси OX и OY называются *осями координатъ*: первая осью x-овъ, а вторая осью y-овъ.

Точка O называется *началомъ* координатъ.

Если уголъ, составляемый осями координатъ прямой, то координаты называются *прямоугольными*, въ обратномъ случаѣ система координатъ называется *косоугольною*.

4. Покажемъ, какъ по заданному положенію точки M на плоскости найти координаты этой точки.

Для удобства, углы образуемые осями координатъ будемъ называть I, II, III, IV, причемъ счетъ угловъ будемъ производить въ сторону обратную движенію часовой стрѣлки, начиная съ угла образованнаго положительными направленіями осей.

1) Возьмемъ точку M въ первомъ углѣ I. Проведемъ черезъ точку M прямыя MP, MQ параллельныя осямъ, тогда мы замѣтимъ, что въ первомъ углѣ обѣ координаты положительны

$$x = +OP,\ y = +OQ \text{ (см. черт. 3)}.$$

2) Если точка M' будетъ взята во второмъ углѣ II, то ея абсцисса будетъ отрицательна, а ордината положительна

$$x' = -OP',\ y' = +OQ'.$$

3) Если точка M'' будетъ взята въ третьемъ углѣ III, то ея обѣ координаты отрицательны

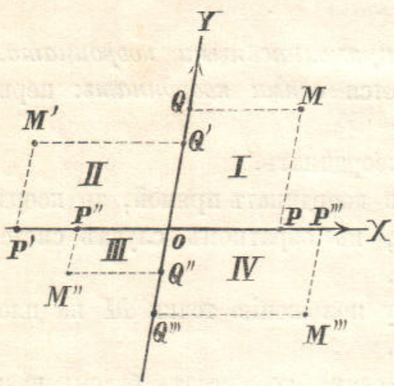
$$x'' = -OP'',\ y'' = -OQ''.$$

4) Наконецъ, если возьмемъ точку M''' въ четвертомъ углѣ IV, то абсцисса ея положительна, а ордината отрицательна

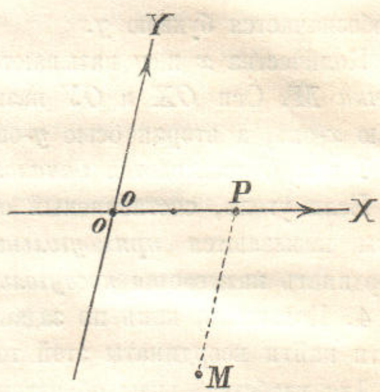
$$x''' = +OP''',\ y''' = -OQ'''.$$

5. На оборотъ, если заданы координаты точки, то мы легко найдемъ положенie самой точки на плоскости.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ заданы координаты $x = +2$; $y = -3$. Для построенія точки соотвѣтствующей заданнымъ координатамъ поступаемъ слѣдующимъ образомъ (см. черт. 4). Откладываемъ на оси x-овъ отрѣзокъ OP равный двумъ единицамъ длины, причемъ отрѣ-



Черт. 3.



Черт. 4.

зокъ этотъ откладываемъ направо отъ начала координатъ, ибо абсцисса, искомой точки положительна ($x = +2$) далѣе черезъ точку P проводимъ прямую, параллельную оси OY и на этой прямой откладываемъ отъ точки P отрѣзокъ MP равный тремъ единицамъ длины, этотъ отрѣзокъ откладывается внизъ отъ точки P, ибо ордината искомой точки отрицательна.

Сказанное построенiе даетъ окончательно одну вполнѣ опредѣленную точку M въ четвертомъ углѣ, координаты которой будутъ $x = +2$ и $y = -3$.

Точки съ координатами $x = a$, $y = b$ будемъ обозначать для краткости символомъ $(a,\ b)$.

Подобнымъ образомъ мы построимъ точку по заданнымъ координатамъ, гдѣ бы ни лежала точка на плоскости, однимъ словомъ, мы можемъ сказать, что положенiе точки на плоскости опредѣляется вполнѣ ея координатами. Итакъ, мы видимъ, что координаты точки суть нѣкоторыя длины, взятыя съ тѣмъ или другимъ знакомъ, причемъ условились при умноженіи координатъ пользоваться тѣмъ правиломъ знаковъ, которое употребляется въ алгебрѣ при перемноженіи положительныхъ и отрицательныхъ количествъ, другими словами, условились считать координаты точки количествами алгебраическими и производить надъ ними всѣ дѣйствія алгебры.

Задачи.

1. Центръ правильнаго шестиугольника взятъ за начало координатъ, положительныя направленія осей идутъ отъ центра къ двумъ рядомъ лежащимъ вершинамъ. Принимая сторону шестиугольника за единицу длины, написать координаты всѣхъ его вершинъ.

Отв. $(+1,0)$, $(0,+1)$, $(-1,+1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(+1,-1)$.

2. Построить точки, имѣющія координаты

$$(+1,0),\ \left(+\frac{1}{2},+\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},+\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ (-1,0),\ \left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

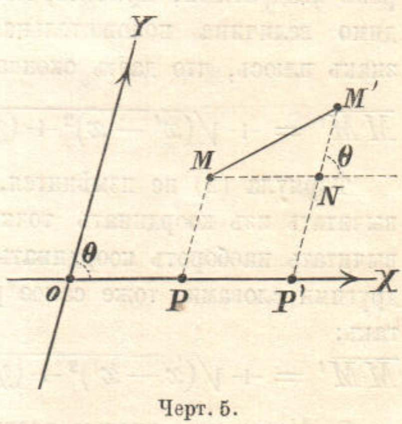
$$\left(+\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

предполагая оси координатъ прямоугольными.

Отв. Точки лежатъ въ вершинахъ правильнаго шестиугольника.

Разстояніе между двумя точками.

6. Приложимъ сказанное къ нахожденію разстоянія между двумя точками на плоскости, положеніе которыхъ задано ихъ координатами. Пусть заданы двѣ точки M и M' (см. черт. 5) и пусть координаты точки M будутъ x и y, а для точки M' нѣкоторыя другія двѣ координаты x', y'.



Черт. 5.

Для опредѣленности предположимъ, что обѣ точки M и M' взяты въ первомъ углѣ такъ, какъ это указано на чертежѣ (см. черт. 5). Проведя черезъ точки M и M' прямыя MP и $M'P'$ параллельныя оси OY до пересѣченія съ осью OX въ точкахъ P и P', мы получимъ:

$$x = +OP,\ y = +MP,\ x' = +OP',\ y' = +M'P'.$$

Проведя черезъ точку M прямую параллельную оси OX, получимъ треугольникъ MNM', двѣ стороны котораго параллельны осямъ координатъ.

Изъ треугольника MNM' получимъ

$$\overline{NM'}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NM'}^2 - 2\,MN.M'N \cos MNM' \qquad (1)$$

Обозначимъ уголъ между положительными направленіями осей черезъ θ, такъ что будетъ $\angle XOY = \theta$, откуда $\cos MNM' = -\cos\theta$ и формула (1) обращается въ слѣдующую:

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NM'}^2 + 2\,\overline{MN}.\overline{NM'}\cos\theta \qquad (1')$$

Остается показать, какъ найти стороны $\overline{MN}$ и $\overline{NM'}$. Мы замѣчаемъ, что

$$MN = PP' = OP' - OP = +OP' - (+OP) = x' - x;$$

точно также

$$M'N = M'P' - NP' = +M'P' - MP =$$
$$= +M'P' - (+MP) = y' - y$$

Откуда получимъ:

$$\overline{MM'}^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + 2(x' - x)(y' - y)\cos\theta.$$

Для полученія искомаго разстоянія $\overline{MM'}$ остается извлечь корень квадратный; причемъ, такъ какъ всякое разстояніе есть необходимо величина положительная, то передъ корнемъ надо поставить знакъ плюсъ, что даетъ окончательно слѣдующую формулу (2)

$$\overline{MM'} = +\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + 2(x' - x)(y' - y)\cos\theta}.$$

Формула (2) не измѣнится, если мы въ ней вмѣсто того, чтобы вычитать изъ координатъ точки M' координаты точки M, будемъ вычитать наоборотъ координаты точки M' изъ координатъ точки M, другими словами, тоже самое разстояніе можетъ быть написано еще такъ:

$$\overline{MM'} = +\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + 2(x - x')(y - y')\cos\theta}.$$

7. Покажемъ, прежде всего, что формула (2) будетъ имѣть мѣсто,

какъ бы ни были взяты на плоскости точки M и M'. Разсмотримъ, напр., случай, когда точка M' находится въ первомъ углѣ, а точка M въ третьемъ.

Проведя черезъ точки M и M' прямыя MP и $M'P'$ параллельныя оси OY до пересѣченія съ осью OX въ точкахъ P и P', получимъ для точки M координаты:

$$x = -OP,\ y = -MP;$$

координаты же точки M' будутъ

$$x' = +OP',\ y' = +P'M'.$$

Проведя черезъ точку M прямую MN, параллельную оси OX, получимъ треугольникъ MNM', изъ котораго будемъ имѣть

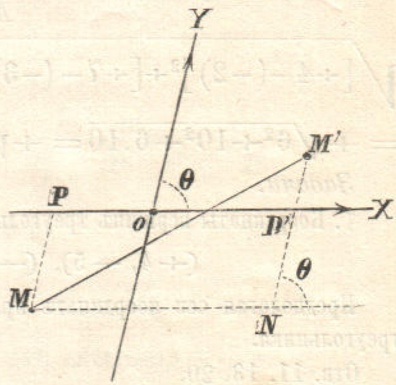
$$\overline{MM'^2} = \overline{MN^2} + \overline{NM'^2} + 2\,\overline{NM}.\overline{NM'}\cos\theta$$

Остается найти NM и $M'N$ (см. черт. 6).

$$\overline{MN} = PP' = OP + OP' = +OP' - (-OP) = x' - x$$

$$\overline{M'N} = P'M' + P'N = +P'M' + PM = +P'M' - (-PM) =$$
$$= y' - y.$$

Отсюда мы видимъ, что для разстоянія двухъ точекъ получится опять формула (2), которая будетъ, слѣдовательно, имѣть мѣсто всегда, какъ бы ни были заданы точки на плоскости.



Черт. 6.

8. Если обѣ точки M и M' лежатъ на прямой параллельной оси OX или же на самой оси OX, то ихъ ординаты y и y' равны между собой и для разстоянія ихъ мы получимъ формулу

$$\overline{MM'} = \pm(x' - x)$$

Знакъ надо ставить тотъ, при которомъ получается положительное число, напр., $+(+2-1)$, $-(2-3)$.

Точно также, если точки лежатъ на прямой параллельной оси OY

или на самой оси OY, тогда $x = x'$ и формула (2) приметъ видъ

$$\overline{MM'} = \pm (y' - y).$$

Если одна изъ точекъ, напр. M', совпадаетъ съ началомъ координатъ, то ея обѣ координаты равны нулю $x' = 0$, $y' = 0$.

Разстояніе точки M (x, y) отъ начала координатъ выразится формулой:

$$\overline{OM} = +\sqrt{x^2 + y^2 + 2\,xy\cos\theta}.$$

Если оси координатъ прямоугольныя, то $\cos\theta = 0$ и разстояніе между двумя точками опредѣляется по формулѣ:

$$\overline{MM'} = +\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2},$$

а разстояніе отъ начала координатъ до точки M по формулѣ:

$$\overline{OM} = +\sqrt{x^2 + y^2}.$$

8. Для примѣра найдемъ разстояніе между точками

$$M\ (x = -2,\ y = -3);\ M'\ (x' = +4,\ y' = +7),$$

причемъ уголъ между осями координатъ $\theta = 60^0$.

Принимая въ соображеніе, что $\cos\theta = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$, мы получаемъ:

$$MM' = \sqrt{[+4-(-2)]^2 + [+7-(-3)]^2 + 2[+4-(-2)].[+7-(-3)].\frac{1}{2}}$$

$$= +\sqrt{6^2 + 10^2 + 6.10} = +\sqrt{36 + 100 + 60} = +\sqrt{196} = 14.$$

Задачи.

1. Координаты вершинъ треугольника суть

$$(+4, -5),\ (-1, +7),\ (-12, +7).$$

Предполагая оси координатъ прямоугольными, найти длины сторонъ этого треугольника.

Отв. 11, 13, 20.

2. Выразить, что разстояніе точки (x, y) до точки $(1, 2)$ равно 3.

Отв. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

3. Выразить, что точка (x, y) одинаково удалена отъ точекъ $(1, 2)$, $(-1, +1)$.

Отв. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2$, или $4x + 2y = 3$.

4. Найти точку равно удаленную отъ трехъ заданныхъ точекъ

$$(2, -1),\ (-1{,}0),\ (3, -1).$$

Отв. $\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

5. Показать, что формула (2) даетъ для разстоянія двухъ точекъ всегда вещественный результатъ.

Отв. Эта формула можетъ быть написана такъ:

$$\overline{MM'} = +\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}[(x'-x)+(y'-y)]^2 + \sin^2\frac{\theta}{2}[(x'-x)-(y'-y)]^2}.$$

10. По координатамъ двухъ точекъ найти координаты точки, дѣлящей разстояніе между этими точками въ отношеніи $m:n$.

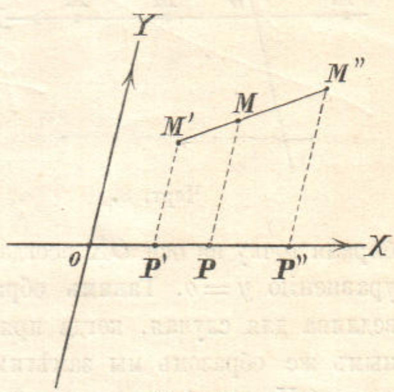
Пусть будутъ заданы точки M' (x', y') и M'' (x'', y''), требуется опредѣлить координаты (x, y) точки M, лежащей на прямой $M'M''$ между точками M' и M'' и дѣлящей разстояніе $M'M''$ на двѣ части MM' и MM'', находящіяся въ отношеніи $m:n$, то есть:

$$m:n = \overline{MM''} : \overline{MM'} = \overline{PP''} : \overline{PP'}$$

или

$$m:n = (x''-x):(x-x')$$

(см. черт. 7),



Черт. 7.

изъ этого уравненія получимъ:

$$x = \frac{mx' + nx''}{m+n}$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ

$$y = \frac{my' + ny''}{m+n}$$

Отсюда легко замѣтить, что координаты средины линіи, соединяющей двѣ заданныя точки

$$(x', y') \text{ и } (x'', y'')$$

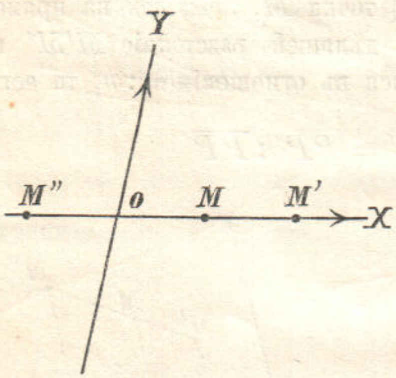
будутъ

$$\frac{x'+x''}{2},\ \frac{y'+y''}{2}$$

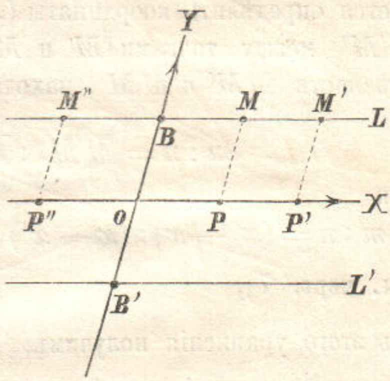
Прямая линія.

11. *Основная теорема.* Какъ бы ни было задано положеніе прямой на плоскости, координаты всѣхъ точекъ, лежащихъ на ней удовлетворяютъ нѣкоторому одному уравненію первой степени, общему для всѣхъ точекъ заданной прямой.

Для доказательства теоремы разсмотримъ всѣ возможные различные случаи положенія прямой на плоскости. Возьмемъ первый простѣйшій случай, когда прямая совпадаетъ съ осью x-овъ; тогда, если мы будемъ разсматривать рядъ точекъ на прямой M, M', M'', то получимъ (см. черт. 8) для точки M координаты: $x = + OM$, $y = o$; для точки M' координаты: $x' = + OM'$, $y' = o$; для точки M'' координаты: $x'' = - OM''$, $y'' = o$. — Однимъ словомъ мы видимъ, что какъ бы ни вы-



Черт. 8.



Черт. 9.

бирали точку на оси OX всегда ордината у такой точки удовлетворяетъ уравненію $y = o$. Такимъ образомъ мы видимъ, что теорема справедлива для случая, когда прямая совпадаетъ съ осью OX. Подобнымъ же образомъ мы замѣтимъ, что, если прямая совпадаетъ съ осью OY, то абсцисса x точекъ лежащихъ на ней будетъ удовлетворять уравненію $x = o$.

12. Такъ же просто разсматривается случай, когда заданная прямая параллельна одной изъ осей координатъ.

Разсмотримъ случай, когда прямая параллельна оси OX. Обозначимъ черезъ b ординату той точки, въ которой заданная прямая пересѣкаетъ ось OY. Для всякой прямой L, лежащей выше оси OX ордината b положительна и равна (см. черт. 9) $+ OB$; наоборотъ для всякой прямой L', лежащей ниже оси OX, ордината b отрицательна и равна $-OB'$.

Если мы разсмотримъ на прямой L рядъ точекъ M, M', M'',..., то мы замѣтимъ, что ординаты этихъ точекъ $y = +PM$, $y' = +P'M'$, $y'' = +P''M''$,... равны между собой т. е. мы получаемъ

$$y = y' = y'' = \ldots = +OB = b$$

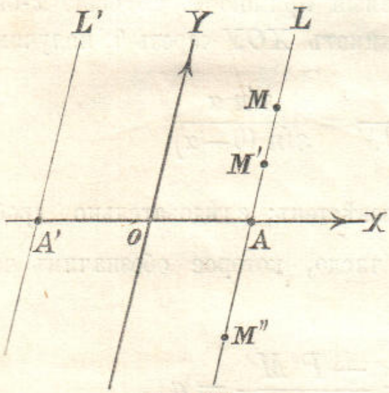
Откуда мы видимъ, что всѣ эти ординаты удовлетворяютъ уравненію

$$y = b.$$

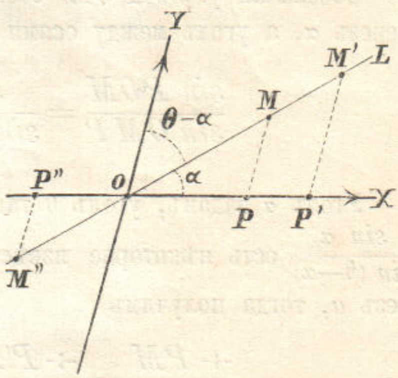
Такому же уравненію будутъ удовлетворять ординаты точекъ, лежащихъ на прямой L', съ тою лишь разницею, что для послѣдней прямой число b будетъ отрицательное, равное $-OB'$.

13. Для прямыхъ параллельныхъ оси OY получается результатъ аналогичный.

Если прямая L (см. черт. 10), параллельная оси OY, пересѣкаетъ ось OX съ положительной стороны въ нѣкоторой точкѣ A,



Черт. 10.



Черт. 11.

тогда мы замѣтимъ, что всѣ точки M, M', M'',..., лежащія на этой прямой имѣютъ общую абсциссу $+OA$ и, слѣдовательно, получимъ уравненіе $x = +OA$, которому удовлетворяютъ абсциссы точекъ, лежащихъ на заданной прямой L. Если прямая L', параллельная OY, пересѣкаетъ ось OX съ отрицательной стороны въ нѣкоторой точкѣ A', тогда получимъ уравненіе $x = -OA'$.—Однимъ словомъ, мы замѣчаемъ, что если обозначить черезъ a абсциссу точки, въ которой прямая параллельная оси OY пересѣкаетъ ось OX, то получится уравненіе $x = a$, которому должны удовлетворять абсциссы точекъ, лежащихъ на подобной прямой.

14. Обращаемся теперь къ случаю, когда заданная прямая проходитъ черезъ начало координатъ. Предположимъ сначала, что заданная прямая лежитъ въ первомъ и третьемъ углѣ (см. черт. 11).

Возьмемъ на прямой рядъ точекъ M, M', M'',... Проведя черезъ точки M, M', M'' прямыя MP, $M'P'$, $M''P''$,... параллельныя оси OY, получимъ, координаты точекъ M, M', M'',...

$$M\ldots\begin{cases} x = +OP \\ y = +MP \end{cases};\quad M'\ldots\begin{cases} x' = +OP' \\ y' = +M'P' \end{cases};\quad M''\ldots\begin{cases} x'' = -OP'' \\ y'' = -P''M'' \end{cases}$$

Изъ треугольниковъ OMP, $OM'P'$, $OM''P''$ получимъ

$$\frac{PM}{OP} = \frac{P'M'}{OP'} = \frac{P''M''}{OP''} = \frac{\sin POM}{\sin OMP}$$

Обозначая уголъ POM составляемый прямою L съ осью x-овъ черезъ α, а уголъ между осями координатъ XOY черезъ θ, получимъ

$$\frac{\sin POM}{\sin OMP} = \frac{\sin \alpha}{\sin MOY} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)}$$

Уголъ α заданъ, уголъ θ также извѣстенъ; слѣдовательно, дробь $\frac{\sin \alpha}{\sin(\theta-\alpha)}$ есть нѣкоторое извѣстное число, которое обозначимъ черезъ a, тогда получимъ

$$\frac{+PM}{+OP} = \frac{+P'M'}{+OP'} = \frac{-P''M''}{-OP''} = a$$

Подставляя сюда координаты точекъ M, M', M'',... будемъ имѣть

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} = a$$

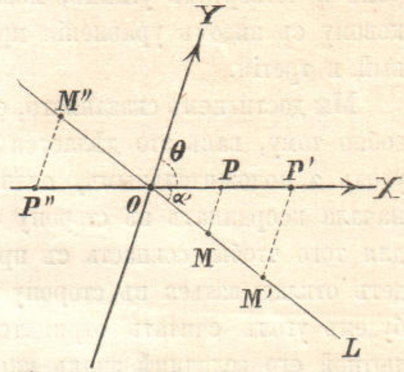
Отсюда, видимъ, что координаты любой точки на заданной прямой L удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{y}{x} = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

которое, по умноженіи на x обращается въ слѣдующее

$$y = ax.$$

Послѣднее же уравненіе есть уравненіе первой степени относительно x и y.



Черт. 12.

15. Разсмотримъ теперь прямую L', проходящую черезъ начало координатъ и лежащую во второмъ и четвертомъ углахъ.

Обозначимъ черезъ α' уголъ составленный прямою L' съ осью OX.

Возьмемъ на прямой L' рядъ точекъ M, M', M'' (см. черт. 12), координаты этихъ точекъ будутъ:

$$M \dots \begin{cases} x = +OP \\ y = -PM \end{cases} M' \dots \begin{cases} x' = +OP' \\ y' = -P'M' \end{cases} M'' \dots \begin{cases} x'' = -OP'' \\ y'' = +P''M'' \end{cases}$$

Изъ треугольниковъ OPM, $OP'M'$, $OP''M''$ получимъ:

$$\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{M''P''}{OP''} = \frac{\sin MOP}{\sin OMP} = \frac{\sin\alpha'}{\sin(180^\circ - \theta - \alpha')} =$$

$$= \frac{\sin\alpha'}{\sin(\theta + \alpha')}$$

Обозначая извѣстное число $\frac{\sin\alpha'}{\sin(\theta+\alpha')}$ черезъ a', получимъ пропорцію

$$\frac{-PM}{+OP} = \frac{-P'M'}{+OP'} = \frac{+M''P''}{-OP'} = -a'$$

Подставляя сюда координаты точекъ M, M', M'', получимъ

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} = -a'$$

откуда заключаемъ, что координаты точекъ, лежащихъ на прямой L' удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{y}{x} = -a' \quad \dots\dots\dots (2)$$

которое, по умноженіи на x, обращается въ уравненіе первой степени

$$y = -a'x$$

16. Покажемъ, что уравненіе (2) прямой L', лежащей во второмъ и четвертомъ углахъ, можетъ быть приведено къ виду одинаковому съ видомъ уравненія прямой, проходящей черезъ углы, первый и третій.

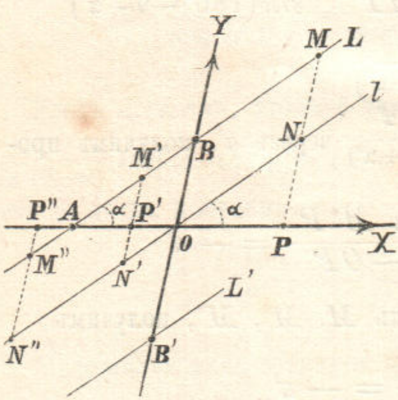
Мы достигнемъ сказаннаго, если условимся отсчитывать уголъ α подобно тому, какъ это дѣлается въ тригонометріи: мы будемъ считать уголъ α положительнымъ, если ось OX должна двигаться вокругъ начала координатъ въ сторону обратную движенію часовой стрѣлки, для того чтобы совпасть съ прямою L и наоборотъ если уголъ будетъ откладываться въ сторону движенія часовой стрѣлки, тогда мы будемъ уголъ считать отрицательнымъ, т. е. приписывать къ абсолютной его величинѣ знакъ минусъ.

Обращаясь къ случаю прямой L' мы замѣчаемъ что уголъ α для этой прямой отрицательный и равенъ $-\alpha'$, слѣдовательно, $\alpha = -\alpha'$, или что одно и тоже $\alpha' = -\alpha$. Подставляя это значеніе для α' въ выраженіе a', получимъ

$$a' = \frac{\sin\alpha'}{\sin(\theta+\alpha')} = \frac{\sin(-\alpha)}{\sin(\theta-\alpha)} = -\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}$$

Уравненіе (2) обращается такимъ образомъ въ слѣдующее

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)} \quad \text{(см. 14).}$$



Черт. 13.

17. Обращаемая наконецъ къ общему случаю, когда прямая задана на плоскости какъ нибудь.

Если прямая не параллельна ни одной изъ координатныхъ осей и не проходитъ черезъ начало координатъ, тогда ея положеніе можетъ быть задано двумя точками пересѣченія A и B съ осями координатъ OX и OY. Вмѣсто одной изъ точекъ, напр., вмѣсто точки A можетъ быть заданъ уголъ α, составленный прямою съ осью OX, положеніе же точки B задается ея ординатою b (см. черт. 13). Проведемъ черезъ начало координатъ прямую l параллельную заданной прямой L.

Будемъ разсматривать пары точекъ (M, N), (M', N'), (M'', N'') лежащихъ на прямыхъ L и l и имѣющихъ общія абсциссы (см. черт. 13) координаты этихъ точекъ будутъ

$$M \ldots \begin{cases} x = +OP \\ y = +PM \end{cases} \quad M' \ldots \begin{cases} x' = -OP' \\ y' = +P'M' \end{cases} \quad M'' \ldots \begin{cases} x'' = -OP'' \\ y'' = -P''M'' \end{cases}$$

$$N \ldots \begin{cases} x_1 = +OP \\ y_1 = +PN \end{cases} \quad N' \ldots \begin{cases} x'_1 = -OP' \\ y'_1 = -P'N' \end{cases} \quad N'' \ldots \begin{cases} x''_1 = -OP'' \\ y''_1 = -P''N'' \end{cases}$$

Имѣя въ виду, что $b = +OB$, получимъ

$$x_1 = x,\ x'_1 = x',\ x''_1 = x'', \ldots$$

$$y_1 = +PN = +PM - MN = +PM - OB = +PM - \\ -(+OB) = y - b$$

$$y'_1 = -P'N' = -(M'N' - P'M') = +P'M' - M'N' = +M'P' - \\ -(+OB) = y' - b$$

$$y''_1 = -P''N'' = -(P''M'' + M''N'') = -P''M'' - \\ -M''N'' = -P''M'' - (+OB) = y'' - b.$$

Итакъ, мы замѣчаемъ, что координаты x, y точекъ M на прямой L связаны съ координатами x_1, y_1 соотвѣтственныхъ точекъ N на прямой l уравненіями

$$y_1 = y - b,\ x_1 = x.$$

Координаты x_1 y_1 точекъ на прямой l проходящей черезъ начало координатъ на основаніи предшествовавшихъ замѣчаній удовлетворяютъ уравненію.

$$\frac{y_1}{x_1} = a,$$

гдѣ $a = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)}$, отсюда мы замѣчаемъ, что координаты точекъ, лежащихъ на прямой L будутъ удовлетворять уравненію

$$\frac{y - b}{x} = a. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Случай, когда заданная прямая пересѣкаетъ ось y-овъ съ отрицательной стороны, какъ это имѣетъ мѣсто для прямой L' (см. черт. 13) даетъ то-же самое уравненіе (3), только ордината b точки B', въ которой прямая L' пересѣкаетъ ось OY, отрицательна.

Мы разсмотрѣли такую прямую L, для которой параллельная прямая l проходитъ въ первомъ и третьемъ углахъ. Для случая обратнаго, т. е. когда прямая l лежитъ во второмъ и четвертомъ углахъ, получается то-же самое уравненіе (3), только число a становится отрицательнымъ.

18. Уравненіе (3) можетъ быть переписано въ такомъ видѣ

$$y = ax + b$$

и представляетъ собою нѣкоторое уравненіе первой степени относительно координатъ x и y.

Итакъ, мы видимъ, что и въ разобранномъ общемъ случаѣ положенія прямой на плоскости координаты точекъ, лежащихъ на ней, удовлетворяютъ нѣкоторому уравненію первой степени.

Всѣ вышеприведенныя разсужденія доказываютъ вполнѣ предложенную основную теорему.

19. *Обратная теорема.* Всякое уравненіе первой степени

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

опредѣляетъ нѣкоторую прямую на плоскости.

Другими словами теорема можетъ быть высказана такъ: какъ бы ни были заданы коэффиціенты A, B, C уравненія (1), всегда существуетъ нѣкоторая прямая, координаты точекъ которой удовлетворяютъ уравненію (1).

Если уравненіе (1) содержитъ одну только координату, что будетъ очевидно, тогда, когда одинъ изъ коэффиціентовъ A, B равенъ нулю; тогда уравненіе (1) принадлежитъ или прямой параллельной одной изъ осей координатъ, или самой оси.

Поэтому остается доказать теорему для уравненія содержащаго обѣ координаты, т. е. когда оба коэффиціента A и B не равны нулю и будутъ нѣкоторыми положительными или отрицательными числами, а C какое нибудь число или нуль.

Рѣшая уравненіе (1) относительно y, получимъ

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

Въ самомъ дѣлѣ, уголъ между новыми осями есть $\beta - \alpha$. Углы, которые составляютъ съ осью OX, старыя оси Ox, Oy суть

$$\angle(Ox, OX) = -\alpha, \quad \angle(Oy, OX) = \theta - \alpha.$$

Отсюда

$$X = \frac{x \sin(\beta - \alpha + \alpha) + y \sin(\beta - \alpha - \theta + \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)},$$

$$Y = \frac{x \sin(-\alpha) + y \sin(\theta - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)},$$

т. е.

$$X = \frac{x \sin\beta + y \sin(\beta - \theta)}{\sin(\beta - \alpha)},$$

$$Y = \frac{-x \sin\alpha + y \sin(\theta - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

41. Изъ полученныхъ нами формулъ (*) легко выписать формулы для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ.

1) Новыя оси координатъ прямоугольны. Въ этомъ случаѣ

$$\beta - \alpha = \pm \frac{\pi}{2},$$

слѣдовательно, въ формулахъ (*) надо поставить

$$\beta = \alpha \pm \frac{\pi}{2};$$

откуда получимъ

$$x = \frac{X \sin(\theta - \alpha) + Y \sin\left(\theta - \alpha \mp \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\theta} =$$

$$= \frac{X \sin(\theta - \alpha) \mp Y \cos(\theta - \alpha)}{\sin\theta},$$

$$y = \frac{X \sin\alpha + Y \sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\theta} = \frac{X \sin\alpha \pm Y \cos\alpha}{\sin\theta}.$$

2) Старыя оси координатъ прямоугольны. Въ этомъ случаѣ

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

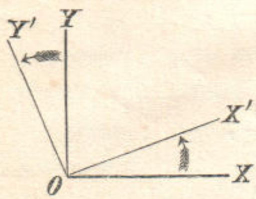
и формулы (*) обращаются въ слѣдующія

$$x = X \cos\alpha + Y \cos\beta,$$

$$y = X \sin\alpha + Y \sin\beta.$$

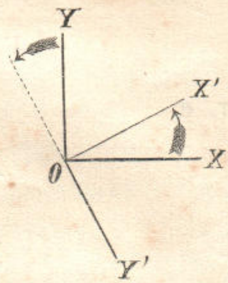
3) Обѣ системы прямоугольны. Въ этомъ случаѣ надо положить

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \beta = \alpha \pm \frac{\pi}{2}.$$



Черт. 27.

Здѣсь знакъ + соотвѣтствуетъ тому случаю, когда вращеніемъ вокругъ начала координатъ старыя оси координатъ могутъ быть совмѣщены съ новыми (см. черт. 27) и знакъ — въ обратномъ случаѣ (см. черт. 28).



Черт. 28.

Формулы преобразованія одной прямоугольной системы координатъ въ другую также прямоугольную суть слѣдующія

$$x = X \cos\alpha \mp Y \sin\alpha$$

$$y = X \sin\alpha \pm Y \cos\alpha$$

3. *Общее преобразованіе координатъ.*

42. Разсмотримъ наконецъ общій случай, когда измѣняется и начало координатъ и направленіе осей. Положеніе новыхъ осей OX и OY опредѣляется координатами a, b новаго начала O' и углами α и β, которые образуютъ положительныя направленія этихъ осей съ положительнымъ направленіемъ старой оси Ox. Чтобы выразить старыя координаты x, y въ новыхъ X и Y введемъ въ разсмотрѣніе вспомогательную координатную систему $x'Oy'$, начало которой совпадаетъ съ началомъ новой системы XOY, а оси параллельны старымъ OX и OY, тогда, называя координаты точки относительно этихъ вспомогательныхъ осей черезъ x', y', получимъ на основаніи сказаннаго.

$$x = a + x', \; y = b + y'.$$

На основаніи же формулъ § 40, получимъ

$$x' = \frac{X \sin(\theta - \alpha) + Y \sin(\theta - \beta)}{\sin\theta}$$

$$y' = \frac{X \sin\alpha + Y \sin\beta}{\sin\theta},$$

отсюда получаемъ искомыя общія формулы для преобразованія одной прямолинейной системы координатъ въ другую

$$x = a + \frac{X \sin(\theta - \alpha) + Y \sin(\theta - \beta)}{\sin\theta}$$

$$y = b + \frac{X \sin\alpha + Y \sin\beta}{\sin\theta}.$$

43. Для приложенія выведенныхъ нами формулъ преобразуемъ выраженіе для квадрата разстоянія точки отъ начала координатъ

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos\theta$$

къ новымъ координатамъ X, Y, оси которыхъ составляютъ съ осью x-овъ углы α, β, начало же остается тоже самое.

Воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} x \sin\theta &= X \sin(\theta - \alpha) + Y \sin(\theta - \beta) = \\ &= X(\sin\theta \cos\alpha - \cos\theta \sin\alpha) + Y(\sin\theta \cos\beta - \cos\theta \sin\beta) = \\ &= \sin\theta (X \cos\alpha + Y \cos\beta) - \cos\theta (X \sin\alpha + Y \sin\beta) = \\ &= \sin\theta\, M - \cos\theta\, N, \end{aligned} \tag{1}$$

гдѣ

$$M = X \cos\alpha + Y \cos\beta,\ N = X \sin\alpha + Y \sin\beta$$

$$y \sin\theta = X \sin\alpha + Y \sin\beta = N \tag{2}$$

Итакъ, воспользуемся формулами (1) и (2)

$$\sin^2\theta (x^2 + y^2 + 2xy \cos\theta) = (M^2 + N^2) \sin^2\theta,$$

откуда

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2xy \cos\theta &= M^2 + N^2 = \\ &= [X \cos\alpha + Y \cos\beta]^2 + [X \sin\alpha + Y \sin\beta]^2 = \\ &= X^2 + Y^2 + 2XY \cdot [\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta] = \\ &= X^2 + Y^2 + 2XY \cdot \cos(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

Такъ какъ уголъ $\beta - \alpha$ есть уголъ между новыми осями, который мы можемъ обозначить черезъ Θ, то мы получимъ

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta = X^2 + Y^2 + 2XY\cos\Theta.$$

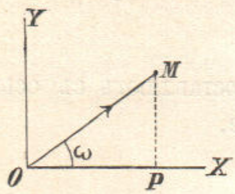
Полярныя координаты.

44. Положеніе точки M можетъ быть опредѣлено при помощи длины r разстоянія OM точки M отъ начала координатъ и угла ω, составляемаго прямою OM съ осью OX (см. черт. 29).

Величины r и ω носятъ названіе *полярныхъ координатъ* точки M, r называется *радіусомъ векторомъ* точки, точка O—*полюсомъ*, а прямая OX полярною осью.

Опуская изъ точки M перпендикуляръ MP на ось OX, получимъ прямоугольныя координаты точки M:

$$x = OP,\ y = PM.$$



Черт. 29.

Изъ прямоугольнаго треугольника OMP получимъ

$$x = OP = OM\cos MOP = r\cos\omega$$

$$y = PM = OM\sin MOP = r\sin\omega$$

Итакъ, преобразованіе прямоугольныхъ координатъ въ полярныя производится при помощи формулъ

$$x = r\cos\omega,\ y = r\sin\omega.$$

Обратное преобразованіе совершается по формуламъ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \omega = arctg\ \frac{y}{x}.$$

Геометрическія мѣста.

45. Геометрическимъ мѣстомъ точекъ называется совокупность точекъ, обладающихъ нѣкоторымъ общимъ для всѣхъ этихъ точекъ свойствомъ.

Такъ напр., окружность круга есть геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ нѣкоторой точки называемой центромъ.

Точно также, полученную нами основную теорему о прямой линіи можно высказать такъ: прямая линія есть геометрическое мѣсто точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ нѣкоторому уравненію первой степени

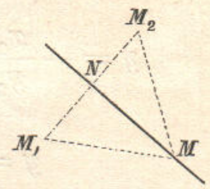
$$Ax + By + C = 0.$$

Часто бываетъ возможно непосредственно выразить указанное свойство точекъ геометрическаго мѣста при помощи алгебраическихъ знаковъ и получить такимъ образомъ нѣкоторое уравненіе. Это уравненіе называется уравненіемъ геометрическаго мѣста.

Пояснимъ сказанное примѣрами.

46. **Задача.** Найти геометрическое мѣсто точекъ равно отстоящихъ отъ двухъ заданныхъ.

Пусть координаты заданныхъ точекъ M_1 и M_2 будутъ: $M_1\,(x_1 y_1)$, $M_2\,(x_2,\,y_2)$. Координаты же точки M, принадлежащей къ искомому геометрическому мѣсту, $(x,\,y)$ (см. черт. 30).



Черт. 30.

Условіе задачи можетъ быть выражено равенствомъ: $\overline{MM}_1 = \overline{MM}_2$, которое можетъ быть написано при прямоугольныхъ осяхъ координатъ въ слѣдующемъ видѣ

$$+\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = +\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}\,.$$

Возвышая обѣ части послѣдняго уравненія въ квадратъ, получимъ

$$x^2-2xx_1+x_1{}^2+y^2-2yy_1+y_1{}^2 = x^2-2xx_2+x_2{}^2+y^2-2yy_2+y_2{}^2,$$

или

$$2x\,(x_2-x_1)+2y\,(y_2-y_1)+x_1{}^2-x_2{}^2+y_1{}^2-y_2{}^2=0.$$

Дѣля это уравненіе на 2, получимъ искомое уравненіе геометрическаго мѣста въ слѣдующемъ видѣ

$$(x_2-x_1)\left[x-\frac{x_1+x_2}{2}\right]+(y_2-y_1)\left[y-\frac{y_1+y_2}{2}\right]=0. \quad (1)$$

Мы замѣчаемъ, что искомое геометрическое мѣсто есть прямая линія, ибо уравненіе (1) первой степени относительно x и y.

Съ перваго взгляда видно, что прямая (1) проходитъ черезъ точку N, координаты которой суть среднія ариѳметическія $\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{y_1+y_2}{2}$ отъ координатъ x_1, x_2, y_1, y_2 заданныхъ точекъ.

Точка N лежитъ на срединѣ разстоянія $M_1 M_2$ между заданными точками.

Остается показать, что прямая (1) перпендикулярна къ прямой $M_1 M_2$. Уравненіе послѣдней прямой $M_1 M_2$ будетъ

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{2}$$

Преобразуемъ уравненія (1) и (2) рѣшеніемъ относительно y, получимъ слѣдующихъ два уравненія

$$y=-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}x+\frac{x_1+x_2}{2}\,\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}+\frac{y_1+y_2}{2} \tag{1'}$$

$$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x+x_1\frac{y_1-y_2}{x_2-x_1}+y_1. \tag{2'}$$

Прямая (1'), или, что одно и тоже, прямая (1) образуетъ съ осью OX уголъ, тангенсъ котораго есть $-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$; прямая же (2'), или, что одно и тоже, прямая (2) образуетъ съ осью OX уголъ, тангенсъ котораго есть $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Изъ указанныхъ выраженій для тангенсовъ легко заключить, что обѣ прямыя MN (1) и $M_1\ M_2$ (2) взаимно перпендикулярны, что и требовалось доказать.

47. **Задача**. Найти геометрическое мѣсто точекъ равно удаленныхъ отъ заданныхъ двухъ прямыхъ.

Пусть заданы уравненія двухъ прямыхъ L и L_1, пересѣкающихся въ нѣкоторой точкѣ O.

$$Ax+By+C=0. \tag{1}$$

$$A_1x+B_1y+C_1=0. \tag{2}$$

Пусть одна изъ точекъ, принадлежащихъ искомому геометрическому мѣсту, будетъ M (см. черт. 31) съ координатами ξ и η.

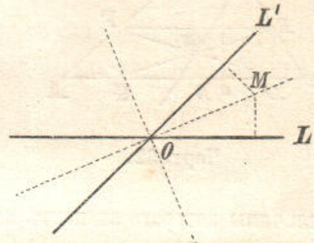
Разстоянія точки M до прямыхъ (1) и (2) выразятся формулами.

$$\frac{A\xi+B\eta+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\ \frac{A_1\xi+B_1\eta+C_1}{\pm\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2}}.$$

Отсюда получимъ уравненія биссекторовъ въ такомъ видѣ

$$\frac{A\xi+B\eta+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{A_1\xi+B_1\eta+C_1}{\pm\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2}}. \tag{3}$$

Мѣняя знаки у корней квадратныхъ въ послѣднемъ уравненіи, мы получимъ два различныхъ уравненія



Черт. 31.

$$\frac{A\xi+B\eta+C}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{A_1\xi+B_1\eta+C_1}{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2}}=0.$$

$$\frac{A\xi+B\eta+C}{\sqrt{A^2+B^2}}-\frac{A_1\xi+B_1\eta+C_1}{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2}}=0.$$

Если уравненія заданныхъ прямыхъ L и L_1 имѣютъ видъ

$$\mathfrak{A}=\cos\alpha\, x+y\sin\alpha-p=0,\ \mathfrak{A}_1=\cos\alpha_1\, x+y\sin\alpha_1-p_1=0,$$

то уравненія двухъ биссекторовъ булутъ

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{A}_1=0;\ \mathfrak{A}-\mathfrak{A}_1=0.$$

48. Часто приходится разсматривать геометрическія мѣста, образуемыя движеніемъ точки, принадлежащей къ нѣкоторой фигурѣ, измѣняющей свой видъ и положеніе на плоскости.

Каждое изъ положеній точки опредѣляется построеніемъ фигуры, различныя части которой зависятъ отъ одного произвольнаго параметра k. Въ подобныхъ вопросахъ, если точка описываетъ при движеніи нѣкоторую линію, приходится поступать такъ. На основаніи условій задачи находимъ два уравненія между координатами x и y

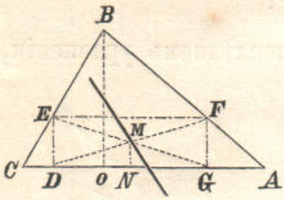
$$f_1(x,y,k)=0,\ f_2(x,y,k)=0.$$

Для нахожденія уравненія искомаго геометрическаго мѣста остается изъ двухъ послѣднихъ уравненій исключить параметръ k. Для производства сказаннаго исключенія рѣшаемъ уравненіе $f_1(x,y,k)=o$ относительно k и получаемъ $k=\varphi(x,y)$; подставляемъ полученное выраженіе для k въ уравненіе $f_2\ (x,\ y,\ k)=0$; получимъ искомое уравненіе геометрическаго мѣста въ слѣдующемъ видѣ

$$f_2\,[x, y, \varphi\,(x, y)]=0.$$

49. Пояснимъ сказанное примѣромъ.

Задача. Найти геометрическое мѣсто центровъ прямоугольниковъ, вписанныхъ въ данный треугольникъ.



Черт. 32.

Мы примемъ за оси координатъ высоту треугольника OB и его основаніе OA. Пусть будетъ $OB=h$, $OA=a$, $OC=c$ (см. черт. 32).

Уравненія сторонъ AB и CB будутъ

$$\frac{y}{h}+\frac{x}{a}=1;\ \frac{y}{x}-\frac{x}{c}=1.$$

Возьмемъ высоту ED перемѣннаго прямоугольника $EDFG$ за тотъ перемѣнный параметръ k, отъ величины котораго зависитъ положеніе и размѣры вписаннаго прямоугольника.

Центръ M прямоугольника лежитъ въ пересѣченіи двухъ его діагоналей EG и DF, а потому его координаты будутъ

$$\eta=MN=\frac{ED}{2}=\frac{k}{2}$$

$$\xi=ON=\frac{x_F+x_E}{2}$$

гдѣ x_F есть абсцисса точки F, а x_E есть абсцисса точки E. Остается найти эти двѣ абсциссы. Точки E и F лежатъ на пересѣченіи прямыхъ AB и BC съ прямою EF, уравненіе которой есть $y=k$.

Отсюда опредѣляемъ x_F и x_E по уравненіямъ

$$\frac{k}{h}+\frac{x_F}{a}=1,\quad \frac{k}{h}-\frac{x_E}{c}=1\,,$$

откуда

$$x_F=a\left(1-\frac{k}{h}\right),\quad x_E=-c\left(1-\frac{k}{h}\right);$$

получаемъ окончательно два уравненія

$$\eta=\frac{k}{2};\quad \xi=\frac{a-c}{2}\left(1-\frac{k}{h}\right),$$

между которыми остается исключить произвольный параметръ k для полученія искомаго геометрическаго мѣста

$$2\xi=(a-c)\left(1-\frac{2\eta}{h}\right)\ \text{или}\ \frac{2\xi}{a-c}+\frac{2\eta}{h}=1.$$

Полученнное уравненіе первой степени относительно ξ и η, а поэтому опредѣляетъ прямую,

Эта прямая имѣетъ на осяхъ координатъ отрѣзки $\frac{a-c}{2}$ и $\frac{h}{2}$, другими словами, есть ничто иное, какъ линія, соединяющая средину высоты со срединой основанія.

50. Разсмотримъ болѣе общій случай, когда положеніе частей подвижной фигуры зависитъ отъ n произвольныхъ параметровъ

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots\ k_n.$$

Въ этомъ случаѣ, если разсматриваемая точка описываетъ нѣкорую линію, можно бываетъ по условіямъ задачи получить $n+1$ уравненій вида

$$\begin{aligned} &f_1\ (x,\ y,\ k_1,\ k_2,\ \ldots\ k_n) = 0 \\ &f_2\ (x,\ y,\ k_1,\ k_2,\ \ldots\ k_n) = 0 \\ &f_3\ (x,\ y,\ k_1,\ k_2,\ \ldots\ k_n) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_{n+1}\ (x,\ y,\ k_1,\ k_2,\ \ldots\ k_n) = 0 \end{aligned}$$

Черезъ исключеніе изъ этихъ уравненій n величинъ $k_1, k_2, \ldots k_n$ получится въ результатѣ одно уравненіе между x и y

$$\Phi\ (x, y) = 0,$$

которое и будетъ искомымъ уравненіемъ геометрическаго мѣста.

Задачи:

1. Дано основаніе треугольника по величинѣ и положенію и разность квадратовъ двухъ другихъ сторонъ; найти геометрическое мѣсто вершины противолежащей основанію.

Отв. Прямая, перпендикулярная къ основанію.

2. Данъ уголъ треугольника по величинѣ и положенію и сумма двухъ прилежащихъ ему сторонъ. Найти геометрическое мѣсто точки, дѣлящей третью сторону въ данномъ отношеніи.

Отв. Прямая.

3. Даны двѣ прямыя, образующія извѣстный уголъ; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія перпендикуляровъ къ нимъ при условіи, что сумма или разность разстояній этихъ перпендикуляровъ отъ вершины даннаго угла имѣетъ данную величину.

Отв. Прямая, параллельная одному изъ биссекторовъ даннаго угла.

4. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія тѣхъ же перпендикуляровъ

(см. зад. 3) при условіи что прямая, соединяющая ихъ основанія имѣетъ данное направленіе.

Отв. Прямая, проходящая черезъ точку пересѣченія двухъ данныхъ.

5. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія тѣхъ же перпендикуляровъ при условіи, что средина разстоянія между ихъ основаніями находится на данной прямой.

Отв. Прямая.

6. Стороны перемѣннаго треугольника вращаются около трехъ неподвижныхъ точекъ, расположенныхъ по прямой линіи, между тѣмъ какъ двѣ изъ вершинъ перемѣщаются по двумъ неподвижнымъ прямымъ; найти геометрическое мѣсто, описанное третьей вершиной.

Отв. Прямая, проходящая черезъ точку пересѣченія двухъ заданныхъ.

7. Стороны многоугольника (съ n сторонами) вращаются вокругъ n неподвижныхъ точекъ, расположенныхъ на прямой линіи, а $n-1$ вершинъ этого многоугольника перемѣщаются по $n-1$ неподвижнымъ прямымъ; найти геометрическое мѣсто n-ой вершины.

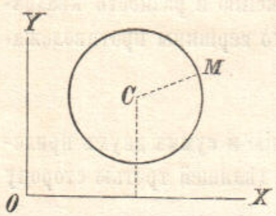
Отв. Прямая.

О кругѣ.

51. Кругъ есть геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ нѣкоторой заданной точки называемой центромъ.

Это свойство точекъ M (см. черт. 33), лежащихъ на кругѣ может быть выражено нѣкоторымъ уравненіемъ, которому должны удовлетворять координаты каждой изъ нихъ.

Въ самомъ дѣлѣ, по формулѣ для растоянія точки M (x, y) на кругѣ отъ центра C (a, b) получимъ для прямоугольныхъ осей координатъ



Черт. 33.

$$+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

Это разстояніе должно быть постоянно и равно длинѣ радіуса r, отсюда получаемъ уравненіе

$$r=+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

которое по возвышеніи въ квадратъ обращается въ слѣдующее

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{1}$$

Послѣднее уравненіе есть искомое уравненіе круга, ибо ему удовлетворяютъ координаты каждой точки, лежащей на кругѣ, радіусъ котораго есть r, а координаты центра суть a и b.

Раскрывая въ уравненіи (1) скобки, мы замѣтимъ, что это уравненіе принимаетъ видъ

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0. \tag{2}$$

Легко показать, что наоборотъ всякое уравненіе вида (2) опредѣляетъ нѣкоторый кругъ.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (2) можетъ быть переписано въ слѣдующемъ видѣ

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2}{4} - C. \tag{2'}$$

Легко замѣтить по виду послѣдняго уравненія, что оно опредѣляетъ кругъ, центръ котораго находится въ точкѣ $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, а радіусъ равенъ $+\sqrt{\frac{A^2+B^2}{4} - C}$.

Для того, чтобы кругъ дѣйствительно существовалъ, необходимо, чтобы послѣдній корень квадратный былъ вещественный, другими словами, чтобы подкоренная величина была положительная, т. е. чтобы было

$$\frac{A^2 + B^2}{4} > C.$$

Если оси координатъ косоугольныя, тогда уравненіе круга напишется такъ

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + 2\,(x - a)\,(y - b)\cos\theta = r^2.$$

52. Уравненіе круга можетъ быть, какъ мы уже видѣли представлено въ видѣ

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

и заключаетъ три произвольныхъ коэффиціента A, B, C, а потому положеніе круга на плоскости можетъ быть опредѣлено тремя условіями.

Можно требовать напримѣръ, чтобы кругъ проходилъ черезъ три заданныя точки $(x_1\ y_1)$, $(x_2\ y_2)$, $(x_3\ y_3)$.

Для указанной цѣли придется опредѣлить коэфиціенты A, B, C по тремъ уравненіямъ.

$$x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C = 0$$

$$x_2^2 + y_2^2 + Ax_2 + By_2 + C = 0$$

$$x_3^2 + y_3^2 + Ax_3 + By_3 + C = 0$$

53. Всякая прямая пересѣкаетъ кругъ въ двухъ точкахъ. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ уравненіе круга

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{1}$$

и уравненіе прямой въ видѣ

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = p. \tag{2}$$

Для полученія координатъ точекъ пересѣченія круга (1) и прямой (2) остается рѣшить уравненіе (1) и (2) совмѣстно относительно x и y. Преобразуемъ предварительно для удобства уравненіе (2) такъ

$$(x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha = p - a\cos\alpha - b\sin\alpha;$$

обозначая вторую часть, $p - a\cos\alpha - b\sin\alpha$, черезъ δ, мы замѣчаемъ, что δ есть по абсолютной величинѣ ничто иное, какъ разстояніе отъ центра круга до прямой. Остается рѣшить уравненіе (1) и $(x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha = \delta$ относительно $x-a$ и $y-b$, получаемъ

$$x - a = \delta\cos\alpha \pm \sin\alpha\sqrt{r^2 - \delta^2}$$

$$y - b = \delta\sin\alpha \mp \cos\alpha\sqrt{r^2 - \delta^2}$$

Итакъ, мы видимъ, что, если $\delta < r$, то координаты обѣихъ точекъ дѣйствительны, если $\delta = r$, тогда двѣ точки сѣченія сливаются въ одну съ координатами

$$x = a + r\cos\alpha$$

$$y = b + r\sin\alpha,$$

а сѣкущая обращается въ касательную, имѣющую уравненіемъ

$$(x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha = r$$

и наконецъ, если разстояніе центра до прямой δ больше радіуса круга, то координаты точекъ сѣченія будутъ мнимыя и кругъ не пересѣкается прямою. Иногда вводятъ въ разсмотрѣніе *мнимыя* точки, или точки, которыхъ координаты мнимыя; такъ что, когда прямая не пересѣкаетъ круга, то говорятъ, что прямая пересѣкаетъ кругъ въ двухъ мнимыхъ точкахъ.

54. Написавъ уравненіе въ видѣ

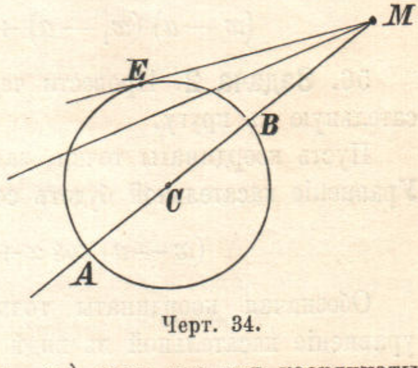
$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0, \tag{1}$$

обозначимъ первую часть его черезъ U, такъ что $U=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2$, мы видимъ, что U равно нулю, если x и y обозначаютъ координаты какой нибудь точки, лежащей на кругѣ (1).

Покажемъ теперь геометрическое значеніе U, если x и y принадлежатъ точкѣ M, не лежащей на кругѣ (см. черт. 34). Выраженіе $(x-a)^2+(y-b)^2$ есть квадратъ разстоянія MC точки M до центра, слѣдовательно,

$$U=\overline{MC}^2-r^2=(MC+r)\ (MC-r)=MA\,.\,MB.$$

На основаніи же извѣстной теоремы элементарной геометріи, мы знаемъ, что $MA.\ BM=EM^2$, гдѣ EM касательная проведенная изъ точки M къ кругу. Если же точка M внутри круга, тогда U будетъ равно, взятому со знакомъ —, произведенію отрѣзковъ сѣкущей, проходящей черезъ точку M.



Черт. 34.

55. **Задача 1**. Провести черезъ точку, лежащую на кругѣ, касательную къ кругу. Пусть данъ кругъ

$$(x-a)^2-(y-b)^2-r^2=0$$

и точка на немъ съ координатами $(x_1,\ y_1)$, такъ что эти координаты удовлетворяютъ уравненію

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2=0. \tag{1}$$

Какъ мы уже видѣли, уравненіе касательной имѣетъ видъ

$$(x-a)\cos\alpha+(y-b)\sin\alpha=r \tag{2}$$

Остается уголъ α подобрать такъ, чтобы касательная проходила черезъ точку $(x_1,\ y_1)$.

Подставляя въ уравненіе (2), получимъ

$$(x_1 - a)\cos\alpha + (y_1 - b)\sin\alpha = r.$$

Возвышая послѣднее уравненіе въ квадратъ и вычитая изъ уравненія (1), получимъ

$$(x_1-a)^2\sin^2\alpha - 2(x_1-a)(y_1-b)\sin\alpha\cos\alpha + (y_1-b)^2\cos^2\alpha = o,$$

откуда

$$\frac{\sin\alpha}{y_1-b} = \frac{\cos\alpha}{x_1-a}.$$

Изъ этой пропорціи получимъ

$$\frac{\sin\alpha}{y_1-b} = \frac{\cos\alpha}{x_1-a} = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}{\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}} = \frac{1}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1-a}{r};\ \sin\alpha = \frac{y_1-b}{r},$$

откуда окончательное уравненіе касательной будетъ имѣть видъ

$$(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = r^2.$$

56. **Задача 2**. Провести черезъ точку, лежащую внѣ круга, касательную къ кругу.

Пусть координаты точки, заданной внѣ круга, будутъ x_1 и y_1. Уравненіе касательной будетъ согласно предъидущему

$$(x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha = r.$$

Обозначая координаты точки касанія черезъ ξ и η, получимъ уравненіе касательной въ видѣ

$$(x-a)(\xi-a) + (y-b)(\eta-b) = r^2 \tag{1}$$

Выражая условіе, что точка $x_1\ y_1$ лежитъ на касательной, получимъ

$$(x_1-a)(\xi-a) + (y_1-b)(\eta-b) = r^2;$$

кромѣ того

$$(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 = r^2; \tag{2}$$

откуда, обозначая

$$x_1 - a = \delta_1\cos\alpha_1,\ y_1 - b = \delta_1\sin a_1$$

получимъ
$$\cos\alpha_1\,(\xi - a) + \sin\alpha_1\,(\eta - b) = \frac{r^2}{\delta_1}, \tag{3}$$
возвышая въ квадратъ послѣднее уравненіе, вычитая изъ (2) и извлекая изъ результата корень квадратный, получимъ
$$(\xi - a)\sin\alpha_1 - (\eta - b)\cos\alpha_1 = r\,\frac{\sqrt{\delta_1^{\,2} - r^2}}{\delta_1}. \tag{4}$$

Изъ послѣднихъ двухъ уравненій (3) и (4) найдемъ $\xi - a$ и $\eta - b$ и подставимъ эти значенія въ уравненіе (1), получимъ окончательно уравненіе касательной, проведенной изъ точки $x_1\ y_1$ къ кругу $U = 0$. Получаются двѣ касательныя, ибо корень $\sqrt{\delta_1^{\,2} - r^2}$ имѣетъ два знака.

57. **Задача 3**. Провести касательную къ кругу параллельно заданной прямой.

Приведя уравненіе заданной прямой къ виду
$$x\cos\mu + y\sin\mu = p,$$
получимъ уравненіе искомой касательной въ видѣ
$$(x - a)\cos\mu + (y - b)\sin\mu = r.$$

58. **Задача 4**. Найти точки пересѣченія двухъ круговъ.

Пусть
$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \tag{1}$$
$$x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0 \tag{2}$$
будутъ уравненія двухъ круговъ относительно прямоугольныхъ координатъ. Точки пересѣченія опредѣлятся изъ этихъ уравненій. Одинъ изъ круговъ можно замѣнить прямою линіей, получаемою черезъ вычитаніе уравненія (2) изъ уравненія (1).
$$(A - A_1)x + (B - B_1)y + (C - C_1) = 0. \tag{3}$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что задача приводится на нахожденіе точекъ пересѣченія круга (1) съ прямою (3). Если прямая пересѣчетъ кругъ, то оба круга будутъ имѣть двѣ точки пересѣченія. Если прямая будетъ касательная къ кругу (1), то обѣ точки сливаются и оба круга касаются. Наконецъ, если прямая не пересѣкаетъ круга, то два круга не пересѣкаются. Во всѣхъ случаяхъ прямая (3) дѣйствительно существуетъ и имѣетъ замѣчательное геометрическое значеніе. Эта прямая есть геометрическое мѣсто точекъ такихъ, что произведенія отрѣзковъ сѣкущихъ, проведенныхъ изъ каждой изъ нихъ къ тому и другому кругу, будутъ одинаковы. Это слѣдуетъ изъ того, что первыя части уравненій (1) и (2) выражаютъ ничто иное какъ произведеніе отрѣзковъ сѣкущихъ, проведенныхъ изъ какой нибудь точки M съ координатами x, y. Прямая (3) называется *радикальною осью* двухъ круговъ. Часть этой прямой лежащая внѣ круговъ, есть геометрическое мѣсто точекъ такихъ, что касательныя проведенныя изъ нихъ къ двумъ кругамъ равны между собою.

Если даны три круга, то три радикальныя оси этихъ круговъ взятыхъ по два пересѣкаются въ одной точкѣ, называемой *радикальнымъ центромъ*.

59. **Задача 5**. Провести кругъ, касательный къ тремъ заданнымъ кругамъ.

Мы видимъ, что уравненіе круга, какъ заключающее три коэфиціента, опредѣляется вполнѣ тремя условіями, которымъ долженъ удовлетворять искомый кругъ. Такъ мы проводили кругъ черезъ три заданныя точки. Подобнымъ же образомъ мы могли бы искать кругъ, проходящій черезъ двѣ точки и касательный къ данной прямой, или проходящій черезъ одну точку и касательный къ двумъ прямымъ, или, наконецъ, кругъ касательнымъ къ тремъ прямымъ. Въ данной задачѣ также имѣются три условія, которыя дадутъ возможность опредѣлить коэфиціенты уравненій искомаго круга.

Соприкосновеніе круговъ можетъ быть двоякое: внутреннее, когда оба центра лежатъ по одну сторону отъ точки касанія и внѣшнее, если они лежатъ по разныя стороны. Въ первомъ случаѣ разстояніе между центрами круговъ равно разности радіусовъ, а во второмъ—суммѣ.

Обозначая координаты центра и радіусъ искомаго круга черезъ: ξ, η и ρ, а также эти величины для данныхъ круговъ черезъ

$$\alpha_1,\ \beta_1 \text{ и } r_1$$
$$\alpha_2,\ \beta_2 \text{ и } r_2$$
$$\alpha_3,\ \beta_3 \text{ и } r_3$$

мы получимъ три условія для опредѣленія величинъ ξ, η, ρ, въ такомъ видѣ

$$\left.\begin{aligned}(\xi-\alpha_1)^2+(\eta-\beta_1)^2&=(\rho\pm r_1)^2\\(\xi-\alpha_2)^2+(\eta-\beta_2)^2&=(\rho\pm r_2)^2\\(\xi-\alpha_3)^2+(\eta-\beta_3)^2&=(\rho\pm r_3)^2\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Смотря по знакамъ во вторыхъ частяхъ этихъ уравненій искомый опредѣляемый ими кругъ можетъ имѣть касаніе различнаго рода съ данными, а потому, дѣлая всевозможныя комбинаціи знаковъ въ системѣ (1), получимъ восемь круговъ, касающихся къ тремъ даннымъ. Исключая изъ трехъ уравненій (1) число ρ, получимъ два уравненія для опредѣленія координатъ ξ и η искомаго центра. Одно изъ этихъ уравненій первой степени относительно координатъ и опредѣляетъ прямую, соединяющую этотъ центръ съ радикальнымъ центромъ трехъ заданныхъ круговъ. Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ $S_1 = o_1$, $S_2 = o$, $S_3 = o$ уравненія трехъ заданныхъ круговъ, гдѣ

$$S_1 = (\xi - \alpha_1)^2 + (\eta - \beta_1)^2 - r^2{}_1, \ S_2 = (\xi - \alpha_2)^2 + (\eta - \beta_2)^2 - r^2{}_2,$$
$$S_3 = (\xi - \alpha_3)^2 + (\eta - \beta_3)^2 - r^2{}_3,$$

мы получимъ три условія (1) въ такомъ видѣ

$$S_1 = \rho^2 \pm 2\rho r_1, \ S_2 = \rho^2 \pm 2\rho r_2, \ S_3 = \rho^2 \pm 2\rho r_3$$

Вычитая, получимъ

$$S_1 - S_2 = 2\rho(\pm r_1 \mp r_2), \ S_1 S_3 = 2\rho(\pm r_1 \mp r_3),$$

откуда уравненіе искомой прямой будетъ

$$\frac{S_1 - S_2}{\pm r_1 \mp r_2} = \frac{S_1 - S_3}{\pm r_1 \mp r_3}.$$

Задачи.

1. Найти координаты центра и радіусъ круга.

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 20.$$

Отв. 1, 2, 5.

2. Найти координаты точекъ сѣченія круга и прямой

$$x^2 + y^2 = 65, \ 3x + y = 25.$$

Отв. (7, 4) (8,1).

3. Когда прямая $y = mx + n$ касается къ кругу $x^2 + y^2 = r^2$?

Отв. Если $n = r\sqrt{1 + m^2}$.

4. Найти уравненіе касательной проведенной изъ начала координатъ къ кругу

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0.$$

Отв. $x - y = 0$, $x + 7y = 0$.

5. Найти точки, въ которыхъ кругъ $x^2 + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$ пересѣкаетъ оси.

Отв. $x = 3$, $x = 2$, $y = 6$, $y = 1$.

6. Найти уравненіе круга, касающагося къ осямъ координатъ въ разстояніи a отъ начала координатъ.

Отв. $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$.

7. Найти касательную въ точкѣ (5, 4) къ кругу

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10.$$

Отв. $3x + y = 19$.

8. Опредѣлить кругъ по тремъ точкамъ: (2, 3), (4, 5), (6, 1).

Отв. $$\left(x - \frac{13}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{50}{9}.$$

9. Найти геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ двухъ опредѣленныхъ точекъ находятся между собой въ данномъ отношеніи.

Отв. Кругъ.

10. Найти геометрическое мѣсто точекъ, сумма квадратовъ разстояній которыхъ отъ n заданныхъ постоянна.

Отв. Кругъ.

11. Найти геометрическое мѣсто techniques срединъ хордъ въ кругѣ, параллельныхъ заданной прямой.

Отв. Прямая.

11. Координаты точки пересѣченія двухъ касательныхъ круга, зная углы образуемые перпендикулярами изъ центра на эти касательныя съ осью x-овъ.

Отв. $$x = r\frac{\cos\frac{1}{2}(\theta' + \theta'')}{\cos\frac{1}{2}(\theta' - \theta'')}, \quad y = r\frac{\sin\frac{1}{2}(\theta' + \theta'')}{\cos\frac{1}{2}(\theta' - \theta'')}.$$

13. Данъ кругъ и внутри его неподвижная точка; около этой точки обращаемъ прямой уголъ и изъ вершины угла опускаемъ перпендикуляръ на хорду, соединяющую точки сѣченія круга сторонами угла. Найти геометрическое мѣсто основаній перпендикуляра.

Отв. Кругъ.

14. Даны различные круги, которые будучи взяты по два, имѣютъ одну и ту же радикальную ось; если перемѣнный кругъ пересѣчетъ два изъ этихъ круговъ подъ постоянными углами, то онъ пересѣчетъ также каждый изъ другихъ круговъ подъ постояннымъ угломъ.

15. Провести кругъ касательный къ тремъ даннымъ прямымъ.

Сокращенный способъ. Трилинейныя координаты. Ангармонія и инволюція.

60. Мы видѣли уже, что уравненіе всякой прямой линіи можетъ быть приведено къ такъ называемому нормальному виду

$$x\cos a + y\sin a - p = 0, \tag{1}$$

гдѣ a есть уголъ, составляемый съ осью x-овъ перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ начала координатъ на прямую, а p есть длина этого перпендикуляра.

Кромѣ того мы знаемъ, что если x_0 и y_0 будутъ координаты какой нибудь точки, не лежащей на прямой (1), то

$$x_0\cos a + y_0\sin a - p$$

будетъ не что иное, какъ взятое со знакомъ плюсъ или минусъ разстояніе отъ точки (x_0, y_0) до прямой (1), причемъ знакъ — будетъ для точекъ (x_0, y_0), лежащихъ съ той стороны прямой, гдѣ лежитъ начало координатъ, а + для точекъ по другую сторону. Отсюда мы видимъ, что, если для сокращенія письма обозначимъ черезъ α всю первую часть уравненія (1), то уравненіе прямой (1) будетъ имѣть видъ

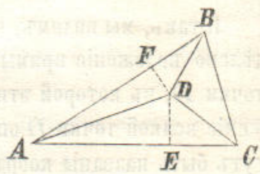
$$\alpha = 0.$$

Подобнымъ же образомъ мы можемъ обозначить черезъ $\beta = 0$ уравненіе всякой другой прямой, приведенное къ виду (1).

61. Для рѣшенія многихъ задачъ на прямую линію можно пользоваться уравненіями прямой въ сокращенномъ видѣ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, не раскрывая выраженій α, β. Въ самомъ дѣлѣ, напишемъ напримѣръ уравненіе прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Какъ мы видѣли уже (см. § 33) уравненіе всякой подобной прямой имѣетъ видъ

$$\beta - \lambda\alpha = 0.$$

Мѣняя коэффиціентъ λ, мы будемъ получать различныя прямыя, проходящія черезъ точку пересѣченія двухъ данныхъ: при $\lambda = 0$ получимъ одну изъ заданныхъ прямыхъ $\beta = 0$, а при $\lambda = \infty$ получимъ $\alpha = 0$, другую прямую *).



Черт. 35.

Принимая $\lambda = +1$ и $\lambda = -1$, мы получимъ уравненія двухъ биссекторовъ угловъ между данными прямыми въ видѣ

$$\alpha + \beta = 0, \quad \beta - \alpha = 0.$$

62. Коэффиціенту λ въ уравненіи $\beta - \lambda\alpha = 0$ легко дать геометрическое толкованіе; въ самомъ дѣлѣ, пусть прямыя $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ будутъ AC и AB (см. черт. 35). Для точки D, лежащей на прямой AD, проходящей черезъ точку A пересѣченія двухъ прямыхъ AC и AB, значенія функцій α и β пусть будутъ α_0 и β_0, причемъ, какъ легко видѣть, будетъ

$$\alpha_0 = \pm DE, \quad \beta_0 = \pm DF.$$

Отсюда легко замѣтить, что для точки D

$$\lambda = \frac{\beta_0}{\alpha_0} = \pm \frac{DF}{DE} = \pm \frac{AD \sin DAF}{AD \sin DAE} = \pm \frac{\sin DAF}{\sin DAE}.$$

Такимъ образомъ мы замѣчаемъ, что абсолютная величина λ есть ничто иное, какъ отношеніе синусовъ угловъ, образуемыхъ прямою $\beta - \lambda\alpha = 0$ съ прямыми $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Если уравненія $\alpha = 0$, $\beta = 0$ взяты не въ нормальномъ видѣ, а какъ

---

*) Уравненіе $\beta - \lambda\alpha = 0$, положеніемъ $\lambda = \dfrac{l}{m}$, приводится къ виду $m\beta - l\alpha = 0$, откуда при $m = 0$ получаемъ съ одной стороны $\lambda = \dfrac{l}{0} = \infty$, съ другой $-l\alpha = 0$, или $\alpha = 0$.

нибудь, такъ что

$$\alpha = Ax + By + C = 0,\ \beta = A_1x + B_1y + C_1,$$

гдѣ $A^2 + B^2$ не $= 1$ и также $A_1{}^2 + B_1{}^2$ не $= 1$, то геометрическое значеніе λ будетъ такое

$$\lambda = \frac{\beta_0}{\alpha_0} = \pm\frac{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}}\ \frac{DF}{DE} = \pm\sqrt{\frac{A_1{}^2 + B_1{}^2}{A^2 + B^2}}\ \frac{\sin DAF}{\sin DAE},$$

причемъ λ будетъ отличаться отъ отношенія синусовъ на постоянный множитель, зависящій отъ положенія основныхъ линій $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.

63. Проведемъ теперь на плоскости третью прямую $\gamma = 0$ и пусть эта прямая не проходитъ черезъ точку A, такъ что она составляетъ съ прямыми $\alpha = 0$, $\beta = 0$ треугольникъ ABC. Уравненіе всякой прямой DC, проходящей черезъ точку C сѣченія двухъ прямыхъ $\alpha = 0$ (AC) и $\gamma = 0$ (BC), напишется такъ

$$\gamma - \mu\alpha = 0.$$

Итакъ, мы видимъ, что если будутъ заданы два числа λ и μ, тогда будетъ опредѣлено положеніе прямыхъ DA и DC и, слѣдовательно, опредѣлится положеніе точки D, въ которой эти прямыя пересѣкаются. Наоборотъ мы видимъ, что положеніе всякой точки D опредѣляетъ пару чиселъ λ и μ, которыя, слѣдовательно, могутъ быть названы координатами точки D.

Вмѣсто заданія координатъ λ и μ можно задавать значенія величинъ α, β, γ, по которымъ опредѣлятся соотвѣтственныя значенія λ и μ $\left(\lambda = \frac{\beta}{\alpha},\ \mu = \frac{\gamma}{\alpha}\right)$.

Три величины α, β, γ называются *трилинейными* координатами точки. Три прямыя $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ называются координатными прямыми. Легко усмотрѣть, что, если начало координатъ лежитъ внутри треугольника $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, то всѣ три трилинейныя координаты отрицательны, для точекъ лежащихъ внутри этого треугольника (это имѣетъ мѣсто, конечно, въ томъ случаѣ если уравненія прямыхъ приведены къ нормальному виду). При переходѣ точки съ одной стороны координатной прямой $\alpha = 0$ на другую, соотвѣтственная трилинейная координата α мѣняетъ знакъ. Такъ какъ мы можемъ за трилинейную координату α выбирать какъ $+\alpha$, такъ и $-\alpha$, то, очевидно, выборомъ знаковъ у α, β, γ мы достигнемъ всегда того, что трилинейныя координаты будутъ одного знака для той части плоскости, для которой пожелаемъ.

Относительно этой системы координатъ можно замѣтить, что всякое уравненіе вида

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

гдѣ l, m, n заданныя постоянныя числа, опредѣляетъ всегда нѣкоторую прямую линію.

Если заданы уравненія трехъ прямыхъ въ трилинейныхъ координатахъ

$$U_1 = 0,\ U_2 = 0,\ U_3 = 0,$$

то для того чтобы заданныя три прямыя пересѣкались въ одной точкѣ, необходимо, чтобы можно было подобрать три постоянныя числа p_1, p_2, p_3, обращающихъ въ тождество равенство

$$p_1 U_1 + p_2 U_2 + p_3 U_3 = 0.$$

Напримѣръ, пусть заданы три прямыя

$$U_1 = \alpha - \beta = 0,\quad U_2 = \beta - \gamma = 0,\quad U_3 = \gamma - \alpha = 0,$$

эти прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ, ибо, полагая $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, получимъ

$$U_1 + U_2 + U_3 = (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha) = 0.$$

Прямыя $U_1 = 0,\ U_2 = 0,\ U_3 = 0$ въ этомъ случаѣ ничто иное, какъ биссекторы угловъ координатнаго треугольника $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0$ (мы предполагаемъ, что эти уравненія приведены къ нормальному виду).

64. Трилинейную систему координатъ можно разсматривать какъ обобщеніе обыкновенной декартовой.

Вмѣсто декартовыхъ координатъ точки x и y полезно бываетъ иногда вводить отношенія двухъ величинъ ξ и η къ нѣкоторой третьй ζ, полагая

$$x = \frac{\xi}{\zeta},\quad y = \frac{\eta}{\zeta}.$$

Величины ξ, η, ζ носятъ названіе *однородныхъ* координатъ точки

Уравненіе прямой $Ax + By + C = 0$ обращается послѣ подстановки въ такое

$$A\frac{\xi}{\zeta} + B\frac{\eta}{\zeta} + C = 0,$$

или окончательно въ слѣдующее

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0.$$

Преобразованіе къ однороднымъ координатамъ приводится, какъ легко замѣтить, ко введенію явнымъ образомъ подъ обозначеніемъ ζ той единицы длины, въ которой выражены координаты точекъ.

Мы возвратимся, слѣдовательно, снова къ декартовой системѣ координатъ, полагая $\zeta = 1$.

Однородная система координатъ, какъ легко показать, есть не что иное, какъ частный случай трилинейной. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія координатныхъ прямыхъ трилинейной системы въ данномъ случаѣ будутъ

$$\xi = 0,\quad \eta = 0,\quad \zeta = 0.$$

Два первыхъ изъ числа послѣднихъ равенствъ даютъ уравненія $x=0$, $y=0$, т. е. уравненія осей декартовыхъ координатъ, а третье уравненіе $\zeta=0$ даетъ

$$x=\infty,\ y=\infty,$$

что даетъ безконечно далекую прямую.

Итакъ декартова система координатъ есть частный случай трилинейной, когда одна изъ координатныхъ прямыхъ безконечно удалена, а двѣ другихъ совпадаютъ съ осями координатъ.

65. Прежде чѣмъ займемся дальнѣйшимъ развитіемъ и приложеніями сокращеннаго способа, остановимся на одномъ общемъ началѣ, имѣющемъ мѣсто при приложеніи способа координатъ къ рѣшенію геометрическихъ вопросовъ. Это начало, называемое *двойственностью*, состоитъ въ томъ, что каждому аналитическому соотношенію соотвѣтствуютъ двѣ теоремы геометріи.

Здѣсь мы ограничимся лишь общими замѣчаніями, оставляя болѣе подробное развитіе этого начала до дальнѣйшаго, когда мы будемъ говорить о кривыхъ линіяхъ.

Въ основаніи декартовой аналитической геометріи лежитъ опредѣленіе положенія точки на плоскости при помощи пары чиселъ, называемыхъ координатами; такимъ образомъ точка принимается за простѣйшій элементъ, причемъ линіи разсматриваются, какъ геометрическія мѣста точекъ.

Вмѣсто точки можно вводить, какъ простѣйшій элементъ, прямую. Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что положеніе прямой на плоскости опредѣляется уравненіемъ

$$y=ax+b,$$

другими словами, опредѣляется заданіемъ двухъ чиселъ a и b. Эти числа можно назвать координатами прямой, ибо заданіемъ ихъ положеніе прямой на плоскости опредѣляется вполнѣ. Такимъ образомъ получаемъ новую систему координатъ, имѣющую большую аналогію съ обыкновенною, только прямая линія и точка мѣняются ролями. Въ самомъ дѣлѣ, какъ при декартовыхъ координатахъ всякое уравненіе вида

$$y=xm+n \tag{*}$$

опредѣляетъ прямую, какъ геометрическое мѣсто точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію (*); такъ для линейныхъ координатъ (a, b) уравненіе вида

$$b=am+n \tag{**}$$

опредѣлитъ точку, какъ пересѣченіе прямыхъ, линейныя координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію (**). Что это такъ, легко видѣть изъ того, что можно найти декартовы координаты точки, опредѣляемой въ линейныхъ координатахъ уравненіемъ (**). Въ самомъ дѣлѣ, подставляемъ b изъ уравненія (**) въ основное уравненіе $y=ax+b$, получимъ

$$y=ax+am+n,\ \text{или}\ y-n=a\,(x+m),$$

послѣднее же уравненіе при различныхъ a опредѣляетъ прямыя, проходящія черезъ искомую точку, декартовы координаты которой, очевидно, будутъ $(-m, +n)$.

66. Мы видѣли уже, что въ декартовыхъ координатахъ уравненіе $\beta - \lambda\alpha = 0$ при различныхъ λ опредѣляетъ пучекъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ $\beta = 0$, $\alpha = 0$.

Подобнымъ образомъ, то же самое уравненіе $\beta - \lambda\alpha = 0$, но уже въ линейныхъ координатахъ опредѣлитъ рядъ точекъ, лежащихъ на прямой, соединяющей двѣ точки, опредѣляемыя уравненіями $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Нѣтъ достаточнаго основанія развивать систему линейныхъ координатъ во всей подробности параллельно съ декартовскою, достаточно ограничиться этой послѣднею, но надлежитъ помнить, что геометрическимъ теоремамъ, выводимымъ при помощи обыкновенной системы координатъ будутъ соотвѣтствовать аналогичныя теоремы, выводимыя на основаніи указанной двойственности.

Поэтому мы ограничимся теперь изученіемъ нѣкоторыхъ свойствъ пучковъ прямыхъ линій, опредѣляемыхъ уравненіемъ $\beta - \lambda\alpha = 0$, помня, что каждому свойству подобнаго пучка будетъ соотвѣтствовать аналогичное свойство прямолинейнаго ряда точекъ.

66. Два пучка $\beta - \lambda\alpha = 0$, $\delta - \mu\gamma = 0$ мы будемъ называть *гомографическими*, если между коэффиціентами λ и μ будетъ существовать зависимость, выражаемая уравненіемъ

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0 \qquad (*)$$

первой степени относительно обоихъ коэффиціентовъ. Всякой парѣ чиселъ λ_0, μ_0, удовлетворяющихъ зависимости (*), соотвѣтствуетъ пара прямыхъ $\beta - \lambda_0\alpha = 0$, $\delta - \mu_0\gamma = 0$, называемыхъ сопряженными прямыми пучковъ, причемъ, очевидно, что каждой прямой одного изъ пучковъ соотвѣтствуетъ одна опредѣленная сопряженная прямая другаго. Въ уравненіе (*) входятъ, какъ параметры, отношенія трехъ изъ числа коэффиціентовъ A, B, C, D къ четвертому, а потому зависимость двухъ гомографическихъ пучковъ опредѣляется вполнѣ заданіемъ трехъ паръ чиселъ

$$(\lambda_1, \mu_1),\ (\lambda_2, \mu_2),\ (\lambda_3, \mu_3).$$

И такъ, мы видимъ, что два гомографическихъ пучка опредѣляются вполнѣ заданіемъ трехъ паръ сопряженныхъ прямыхъ, тогда каждой четвертой прямой $\beta - \lambda_4\alpha = 0$ перваго пучка будетъ соотвѣтствовать вполнѣ опредѣленная сопряженная прямая $\delta - \mu_4\gamma = 0$ втораго.

Прямыя $\alpha = 0$, $\beta = 0$ для перваго пучка и $\gamma = 0$, $\delta = 0$ для втораго будемъ называть основными, тогда легко замѣтить, что выборомъ основныхъ линій пучковъ и ихъ сопряженныхъ можно упростить уравненіе (*). Въ самомъ дѣлѣ, можно заставить пропасть изъ уравненія (*) два коэффиціента, причемъ привести уравненіе къ одному изъ двухъ видовъ

$$A\lambda\mu + D = 0, \quad B\lambda + C\mu = 0.$$

Въ первомъ случаѣ прямыя β и γ, а также α и δ сопряженныя, во второмъ же случаѣ сопряженныя прямыя суть β и δ, α и γ.

67. Обратимся теперь къ общему виду уравненія (*). Ясно, что коэффиціентъ A мы можемъ считать не равнымъ нулю, тогда, дѣля на него все уравненіе, получимъ

$$\lambda\mu + L\lambda + M\mu + N = 0. \tag{**}$$

Покажемъ теперь зависимость между четырьмя парами сопряженныхъ прямыхъ двухъ гомографическихъ пучковъ

$$\lambda_1\mu_1 + L\lambda_1 + M\mu_1 + N = 0. \tag{1}$$

$$\lambda_2\mu_2 + L\lambda_2 + M\mu_2 + N = 0. \tag{2}$$

$$\lambda_3\mu_3 + L\lambda_3 + M\mu_3 + N = 0. \tag{3}$$

$$\lambda_4\mu_4 + L\lambda_4 + M\mu_4 + N = 0. \tag{4}$$

Умножая уравненіе (1) на $\mu_3 + L$, а (3) на $\mu_1 + L$ и вычитая, получимъ

$$(\lambda_1 - \lambda_3)(\mu_1 + L)(\mu_3 + L) = (N - LM)(\mu_1 - \mu_3). \tag{5}$$

Подобнымъ же образомъ, умножая уравненіе (2) на $\mu_3 + L$, а (3) на $\mu_2 + L$ и вычитая, получимъ

$$(\lambda_2 - \lambda_3)(\mu_2 + L)(\mu_3 + L) = (N - LM)(\mu_2 - \mu_3) \tag{6}$$

Дѣля уравненіе (5) на (6), получимъ

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} \cdot \frac{\mu_1 + L}{\mu_2 + L} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3}. \tag{7}$$

Поступая подобнымъ образомъ съ первыми двумя уравненіями и съ уравненіемъ (4) вмѣсто уравненія (3), мы получимъ

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} \cdot \frac{\mu_1 + L}{\mu_2 + L} = \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_2 - \mu_4}. \tag{8}$$

Изъ уравненій (7) и (8) черезъ дѣленіе получимъ окончательно

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_2 - \mu_4}. \tag{9}$$

Выраженіе

$$H = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}$$

называется *ангармоническимъ* отношеніемъ пучка прямыхъ *).

Послѣднее равенство (9) выражаетъ основное свойство двухъ гомографическихъ пучковъ, состоящее въ томъ, что ангармоническое отношеніе четырехъ прямыхъ одного пучка должно равняться ангармоническому отношенію сопряженныхъ прямыхъ другаго.

*) Chasles. Traité de Géométrie supérieure. 1880, p. 7.

68. Если теперь мы будетъ разумѣть подъ уравненіями

$$\beta-\lambda\alpha=0 \text{ и } \delta-\mu\gamma=0,$$

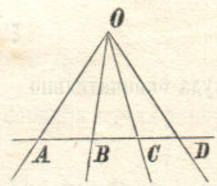
слѣдуя закону двойственности, два прямолинейные ряда точекъ, то мы будемъ эти два ряда называть гомографическими, когда ангармоническія отношенія сопряженныхъ точекъ этихъ двухъ рядовъ одинаковы. Мы и здѣсь ангармоническимъ отношеніемъ по аналогіи называемъ величину

$$H=\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3}:\frac{\lambda_1-\lambda_4}{\lambda_2-\lambda_4}.$$

69. Покажемъ теперь геометрическое значеніе отношенія H. Предварительно упростимъ задачу, полагая $\lambda_3=0$, $\lambda_4=\infty$, что соотвѣтствуетъ выбору прямыхъ $\beta=0$, $\alpha=0$.

Пусть будутъ прямыя $\alpha=0$ OA, а $\beta=0$ OB (см. черт. 36) и двѣ другія OC и OD. Отношеніе H въ данномъ случаѣ напишется такъ

$$H=\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3}:\frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_4}-1}{\frac{\lambda_2}{\lambda_4}-1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$



Черт. 36.

ибо $\lambda_3=0$, $\lambda_4=\infty$.

Мы видѣли уже, что

$$\lambda_1=m\,\frac{\sin COB}{\sin COA},\quad \lambda_2=m\,\frac{\sin DOB}{\sin DOA},$$

гдѣ m зависитъ отъ коэффиціентовъ уравненій $\alpha=0$, $\beta=0$ и, слѣдовательно, не зависитъ отъ положенія прямыхъ OC и OD. Если уравненія $\alpha=0$ и $\beta=0$ приведены къ нормальному виду, то $m=\pm1$, причемъ знакъ λ укажется въ зависимости отъ положенія начала координатъ по отношенію къ прямымъ $\alpha=0$ и $\beta=0$. Такъ какъ для насъ важенъ знакъ числа $H=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, то намъ достаточно замѣтить, что λ_1 и λ_2 будутъ одинаковыхъ знаковъ, если прямыя OC и OD лежатъ въ одной парѣ вертикальныхъ угловъ, образуемыхъ прямыми OA и OB и разныхъ, если въ разныхъ углахъ.

Отсюда мы видимъ, что ангармоническое отношеніе H по абсолютной величинѣ равно

$$\frac{\sin COB}{\sin COA}:\frac{\sin DOB}{\sin DOA}$$

знакъ же величины H будетъ $+$, если прямыя OC и OD лежатъ въ одной парѣ вертикальныхъ угловъ, образуемыхъ прямыми OA и OB, и знакъ $-$, если прямыя OC и OD отдѣляются прямыми OA и OB.

70. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію рядовъ точекъ.

Возьмемъ рядъ точекъ
$$\beta - \lambda\alpha = 0,$$
гдѣ $\beta = b - m_1 a - n_1 = 0$ и $\alpha = b - m_2 a - n_2 = 0$, опредѣляютъ двѣ точки $(-m_1, n_1)$ и $(-m_2, n_2)$. Такъ что, называя декартовы координаты точекъ $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ черезъ (x_1, y_1), (x_2, y_2), получимъ
$$x_1 = -m_1,\ x_2 = -m_2,\ y_1 = n_1,\ y_2 = n_2.$$
Уравненіе нашего ряда точекъ можетъ быть написано такъ
$$\beta - \lambda\alpha = b(1-\lambda) - a(m_1 - \lambda m_2) - (n_1 - \lambda n_2) = 0,$$
или такъ
$$b = a\,\frac{m_1 - \lambda m_2}{1-\lambda} + \frac{n_1 - \lambda n_2}{1-\lambda},$$
называя декартовы координаты точки, опредѣляемой послѣднимъ уравненіемъ черезъ ξ и η, получимъ
$$\xi = -\frac{m_1 - \lambda m_2}{1-\lambda},\quad \eta = \frac{n_1 - \lambda n_2}{1-\lambda},$$
откуда окончательно
$$\xi = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda},\quad \eta = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda}.$$
Послѣднія формулы показываютъ, что λ есть не что иное, какъ отношеніе разстояній точки (ξ, η) отъ точекъ (x_1, y_1), (x_2, y_2). Причемъ мы знаемъ, что λ имѣетъ знакъ $+$, если точка (ξ, η), или, что одно и то же, точка, опредѣляемая уравненіемъ $\beta - \lambda\alpha = 0$, лежитъ внѣ отрѣзка, составляемаго точками $\beta = 0$ и $\alpha = 0$, и знакъ $-$, если точка $\beta - \lambda\alpha = 0$ лежитъ внутри отрѣзка. Значенію $\lambda = 1$ соотвѣтствуетъ какъ легко замѣтить точка, лежащая на безконечности, а значенію $\lambda = -1$ средина отрѣзка $\beta = 0$, $\alpha = 0$.

Обратимся къ чертежу 36. Пусть уравненія четырехъ точекъ A, B, C, D будутъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\beta - \lambda_1\alpha = 0$, $\beta - \lambda_2\alpha = 0$. Тогда, если точки лежатъ такъ, какъ показано на чертежѣ
$$\lambda_1 = \frac{CB}{CA},\ \lambda_2 = \frac{DB}{DA},$$
откуда ангармоническое отношеніе этихъ четырехъ точекъ
$$H = \frac{CB}{CA} : \frac{DB}{DA}.$$
Что касается знака H, то легко замѣтить, что этотъ знакъ будетъ $+$, если обѣ точки C, D лежатъ или внутри, или внѣ отрѣзка AB и $-$, если одна изъ точекъ C, D лежитъ внутри, а другая внѣ отрѣзка.

71. Покажемъ, что всякій пучекъ $OABCD$ гомографически связанъ съ рядомъ точекъ $ABCD$, образуемымъ этимъ пучкомъ на любой сѣкущей прямой AD.

Это свойство было извѣстно древнимъ геометрамъ.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ треугольниковъ AOC, BOC, AOD, BOD (см. черт. 36), получаемъ

$$\frac{AC}{OC}=\frac{\sin AOC}{\sin CAO},\ \frac{CB}{OC}=\frac{\sin COB}{\sin CBO}$$

$$\frac{DA}{OD}=\frac{\sin DOA}{\sin DAO},\ \frac{DB}{OD}=\frac{\sin DOB}{\sin DBO}$$

Дѣля первое равенство на второе и третье на четвертое, получимъ

$$\frac{CB}{CA}=\frac{\sin COB}{\sin COA}:\frac{\sin CAO}{\sin CBO}$$

$$\frac{DB}{DA}=\frac{\sin DOB}{\sin DOA}:\frac{\sin DAO}{\sin DBO},$$

откуда окончательно получимъ

$$\frac{CB}{CA}:\frac{DB}{DA}=\frac{\sin COB}{\sin COA}:\frac{\sin DOB}{\sin DOA}.$$

Итакъ мы видимъ, что дѣйствительно ангармоническое отношеніе пучка равно ангармоническому отношенію ряда точекъ.

72. Отсюда, какъ слѣдствіе, мы замѣчаемъ, что всякій пучекъ линій на разныхъ сѣкущихъ даетъ гомографическіе ряды точекъ и наоборотъ, если мы соединимъ точки нѣкотораго прямолинейнаго ряда съ двумя произвольными точками плоскости прямыми, то получимъ два гомографическихъ пучка.

73. Если пара сопряженныхъ элементовъ двухъ гомографическихъ пучковъ совпадаетъ въ одну прямую, то сопряженныя прямыя такихъ пучковъ всегда пересѣкаются въ одной прямой. Въ самомъ дѣлѣ, пусть въ двухъ пучкахъ

$$\beta-\lambda\alpha=0,\ \delta-\mu\gamma=0$$

совпадаетъ прямая $\alpha=0$ и $\gamma=0$, такъ что уравненія этихъ пучковъ могутъ быть написаны такъ

$$\beta-\lambda\alpha=0,\ \delta-\mu\alpha=0,$$

причемъ $\lambda=\infty$ должно соотвѣтствовать $\mu=\infty$, а тогда уравненіе (*) § 66 не должно заключать члена съ произведеніемъ $\lambda\mu$, ибо

$$\mu=-\frac{B\lambda+D}{A\lambda+C}=-\frac{B+\frac{D}{\lambda}}{A+\frac{C}{\lambda}};$$

при $\lambda = \infty$, получимъ

$$\mu = -\frac{B}{A},$$

но, чтобы послѣднее выраженіе обратилось въ ∞, необходимо положить $A = 0$.

И такъ, уравненіе (*) принимаетъ видъ

$$B\lambda + C\mu + D = 0.$$

Остается еще упростить (*), принимая за $\beta = 0$ и $\delta = 0$ пару сопряженныхъ элементовъ, тогда очевидно уравненію $\lambda = 0$ должно соотвѣтствовать равенство $\mu = 0$, что показываетъ, что $D = 0$ и окончательно уравненіе (*) принимаетъ видъ

$$B\lambda + C\mu = 0. \qquad (*)$$

Для нахожденія геометрическаго мѣста точекъ пересѣченія сопряженныхъ элементовъ заданныхъ пучковъ необходимо исключить λ и μ изъ уравненій (*) и

$$\beta - \lambda\alpha = 0,\ \delta - \mu\alpha = 0,$$

откуда получимъ

$$B\frac{\beta}{\alpha} + C\frac{\delta}{\alpha} = \frac{B\beta + C\delta}{\alpha} = 0.$$

Мы видимъ, что искомое геометрическое мѣсто есть прямая

$$B\beta + C\delta = 0,$$

что и требовалось доказать.

Переходя отъ пучковъ линій къ рядамъ точекъ, мы получимъ аналогичную теорему, а именно, если въ точкѣ пересѣченія двухъ прямыхъ, на которыхъ расположены два гомографическихъ ряда точекъ, совпадаютъ два сопряженныхъ элемента обоихъ рядовъ, то прямыя соединяющія всѣ сопряженныя пары элементовъ этихъ рядовъ пересѣкаются въ одной точкѣ. Въ этомъ случаѣ одинъ рядъ представляетъ такъ называемую перспективу другаго.

74. Пучекъ четырехъ прямыхъ, въ томъ случаѣ когда ангармоническое его отношеніе H равно -1, составляетъ такъ называемую *гармоническую* группу.

Четыре прямыя

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \beta - \lambda_1\alpha = 0,\ \beta - \lambda_2\alpha = 0$$

составляютъ гармоническую группу, когда

$$H = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1.$$

Откуда $\lambda_2 = -\lambda_1$ и, слѣдовательно, общій видъ уравненій прямыхъ гармонической группы будетъ

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \beta - \lambda_1\alpha = 0,\ \beta + \lambda_1\alpha = 0.$$

Полагая $\lambda_1 = 1$, получимъ въ частности такую гармоническую группу

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \beta - \alpha = 0,\ \beta + \alpha = 0.$$

Если уравненія $\alpha = 0$, $\beta = 0$ приведены къ нормальному виду, то послѣдняя группа есть ничто иное, какъ двѣ прямыя $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и ихъ биссекторы угловъ.

Обращаясь къ рядамъ точекъ, мы скажемъ, что четыре точки образуютъ гармоническую группу если ихъ уравненія въ линейныхъ координатахъ могутъ быть представлены въ такомъ видѣ

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \beta - \lambda\alpha = 0,\ \beta + \lambda\alpha = 0.$$

Такъ какъ $H = -1$, то мы замѣчаемъ, что изъ точекъ

$$\beta + \lambda\alpha = 0,\ \beta - \lambda\alpha = 0$$

одна лежитъ внутри промежутка между точками $\alpha = 0$, $\beta = 0$, а другая внѣ этого промежутка.

Когда $\lambda = 1$, то получаемъ гармоническую группу, состоящую изъ точекъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, точки $\alpha + \beta = 0$, дѣлящей разстояніе между точками $\alpha = 0$, $\beta = 0$ пополамъ и наконецъ точки $\beta - \alpha = 0$, лежащей на безконечности (см. § 70).

Очевидно, что всякій гармоническій пучекъ образуетъ на сѣкущей гармоническую группу точекъ, причемъ, если въ этой группѣ одна изъ точекъ безконечно удалена, то другая точка дѣлитъ разстояніе между двумя остальными пополамъ. Въ послѣднемъ случаѣ сѣкущая параллельна одной изъ прямыхъ гармоническаго пучка.

75. *Полный четыреугольникъ.* Четыреугольникъ $AFEC$ съ продолженіями его сторонъ до встрѣчи въ точкахъ B и D называется полнымъ. Прямыя AE, FC и BD называются его діагоналями (см. черт. 37).

Будемъ вести разсужденіе наше въ трилинейныхъ координатахъ, причемъ за координатный треугольникъ примемъ треугольникъ ABC. Пусть уравненія его сторонъ BC, AB, AC будутъ

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0.$$

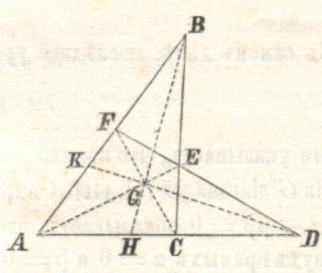
Пусть уравненіе остальной стороны FE заданнаго полнаго четыреугольника, выраженное въ трилинейныхъ координатахъ, будетъ $\delta = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$.

Уравненія діагоналей AE, FC, BD будутъ

$$\mu\beta + \nu\gamma = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$\lambda\alpha + \nu\gamma = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$\lambda\alpha + \mu\beta = 0 \qquad \text{(III)}$$



Черт. 37.

Что это такъ, легко видѣть изъ слѣдующихъ соображеній. Возьмемъ, напримѣръ, прямую (I), уравненіе $\mu\beta + \nu\gamma = 0$ показываетъ, что прямая, опредѣляемая уравненіемъ (I), проходитъ черезъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ $\beta = 0$, $\gamma = 0$, т. е. черезъ точку A; съ другой стороны тѣ же уравненія діагоналей могутъ быть написаны такъ

$$\delta - \lambda\alpha = 0, \qquad \text{(I)}$$

$$\delta - \mu\beta = 0, \qquad \text{(II)}$$

$$\delta - \nu\gamma = 0, \qquad \text{(III)}$$

откуда видимъ, что прямая (I) должна проходить черезъ точку пересѣченія прямыхъ $\delta = 0$ и $\alpha = 0$, или, что одно и тоже, черезъ точку E. И такъ, мы видимъ, что дѣйствительно прямая (I), какъ проходящая черезъ двѣ точки A и E совпадаетъ съ діагональю AE. Подобнымъ образомъ мы убѣдимся, что уравненія (II) и (III) опредѣляютъ двѣ другія діагонали FC и BD. Легко замѣтить, что три діагонали съ четырьмя сторонами заданнаго четыреугольника образуютъ 11 полныхъ четыреугольниковъ, считая въ томъ числѣ и заданный; если теперь мы захотимъ для всѣхъ этихъ четыреугольниковъ провести діагонали, то придется еще добавить шесть прямыхъ линій, имѣющихъ уравненіями

$$\delta + \lambda\alpha = 0,\ \delta + \mu\beta = 0,\ \delta + \nu\gamma = 0.$$

$$\lambda\alpha - \mu\beta = 0,\ \mu\beta - \nu\gamma = 0,\ \nu\gamma - \lambda\alpha = 0.$$

Достаточно одного взгляда на эти уравненія, чтобы замѣтить, что указанныя 13 прямыхъ образуютъ въ шести вершинахъ заданнаго четыреугольника и трехъ точкахъ пересѣченія діагоналей 9 гармоническихъ пучковъ.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ одинъ изъ указанныхъ 10 полныхъ четыреугольниковъ, напримѣръ, четыреугольникъ образуемый двумя діагоналями AE, FC и двумя сторонами AB и BC. Двѣ діагонали этого послѣдняго четыреугольника совпадаютъ съ прямыми FE и AC, остается добавить еще третью діагональ BG, уравненіе которой, очевидно, будетъ

$$\lambda\alpha - \mu\beta = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, послѣднее уравненіе можетъ быть написано въ видѣ

$$\lambda\alpha + \nu\gamma - (\mu\beta + \nu\gamma) = 0,$$

что указываетъ, что прямая, опредѣляемая имъ проходитъ черезъ точку пересѣченія G діагоналей (I), (II). Съ другой стороны первоначальный видъ этого уравненія $\lambda\alpha - \mu\beta = 0$ показываетъ, что эта прямая проходитъ черезъ точку B пересѣченія двухъ прямыхъ $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.

И такъ, мы видимъ, что четыре прямыя BC, AB, GB, BD, проходящія черезъ точку B, имѣютъ уравненіями

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \lambda\alpha - \mu\beta = 0,\ \alpha\lambda + \mu\beta = 0,$$

что показываетъ, что эти прямыя образуютъ гармоническій пучекъ. Подобнымъ образомъ, если мы соединимъ точку G съ точкою D прямою, то при точкѣ D образуется также гармоническій пучекъ AD, GD, FD, BD.

Слѣдовательно, четыре точки A, H, C, D составляютъ гармоническій рядъ на прямой AD, подобнымъ же образомъ на прямой AB получается гармоническій рядъ A, K, F, B.

Свойства полнаго четыреугольника примѣняются къ нѣкоторымъ геометрическимъ построеніямъ.

76. Обратимся теперь къ гомографическимъ пучкамъ, проведеннымъ вокругъ одной и той же точки.

Возьмемъ два пучка, проходящіе черезъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ

$$\alpha = 0,\ \beta = 0;$$

уравненія такихъ пучковъ будутъ

$$\beta - \lambda\alpha = 0,\ \beta - \mu\alpha = 0.$$

Эти пучки будутъ гомографическіе, если между λ и μ будетъ зависимость

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0.$$

Главную особенность подобныхъ пучковъ, проведенныхъ черезъ одну точку представляютъ такъ называемые двойные элементы.

77. Двойною прямою пучковъ

$$\beta - \lambda\alpha = 0,\ \beta - \mu\alpha = 0$$

мы будемъ называть прямую, въ которую сливаются двѣ сопряженныя прямыя пучковъ.

Чтобы получить двойную прямую, надо положить въ уравненіе (*) (§ 66) $\mu = \lambda$, откуда получимъ для опредѣленія λ такое квадратное уравненіе

$$A\lambda^2 + (B + C)\lambda + D = 0. \qquad (**)$$

И такъ мы видимъ, что, если корни послѣдняго уравненія (**) вещественные, то существуютъ двѣ двойныя прямыя, если же корни равны между собой, то двойныя прямыя сливаются въ одну и наконецъ, если корни уравненія мнимые, то двойныхъ прямыхъ не существуетъ.

Если существуютъ двѣ двойныя прямыя, то принимая ихъ за $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, мы приведемъ уравненіе (*) къ виду

$$B\lambda + C\mu = 0,$$

ибо тогда при $\lambda = 0$, $\mu = 0$, а при $\lambda = \infty$, $\mu = \infty$, что указываетъ, что въ пучкахъ $\beta - \lambda\alpha = 0$, $\beta - \mu\alpha = 0$, $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ двойные элементы.

78. Разсмотримъ два гомографическихъ пучка

$$\beta - \lambda\alpha = 0,\ \beta - \mu\alpha = 0.$$

Положимъ, что сопряженныя прямыя L и L_1 будутъ такъ называемыя взаимныя, т. е., если прямой L перваго пучка будетъ соотвѣтствовать прямая L_1 во второмъ, то, обратно, прямой L_1 разсматриваемой, какъ принадлежащей первому пучку будетъ соотвѣтствовать прямая L во второмъ. Необходимо, чтобы уравненіе (*) удовлетворилось также и въ томъ случаѣ, когда переставимъ частныя значенія λ и μ, соотвѣтствующія двумъ прямымъ L и L_1, а для этого необходимо, чтобы было

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0.$$

$$A\lambda\mu + B\mu + C\lambda + D = 0.$$

Вычитая получимъ

$$(\lambda - \mu)(B - C) = 0;$$

послѣднее же уравненіе удовлетворяется, или когда $\lambda = \mu$, или же $B = C$. Въ первомъ случаѣ мы получаемъ двойныя прямыя. Во второмъ случаѣ получается особенная гомографическая зависимость, въ которой всѣ сопряженныя прямыя взаимныя.

Такая зависимость носитъ названіе *инволюціи.*

И такъ, общій видъ уравненія (*), опредѣляющаго инволюцію, двухъ пучковъ, будетъ

$$A\lambda\mu + B(\lambda + \mu) + D = 0.$$

Это уравненіе мы значительно упростимъ, если выберемъ за основныя прямыя α и β два взаимныхъ элемента, тогда уравненіе инволюціи обратится въ болѣе простое

$$A\lambda\mu + D = 0.$$

Полагая $-\dfrac{D}{A} = M$, мы получимъ общій случай инволюціи, выраженный уравненіями

$$\beta - \lambda\alpha = 0, \ \beta - \mu\alpha = 0,$$

гдѣ λ и μ удовлетворяютъ уравненію

$$\lambda\mu = M.$$

Если $M > 0$, то существуютъ двѣ двойныя прямыя инволюціи, опредѣляемыя уравненіями

$$\beta - \sqrt{M}.\,\alpha = 0 \text{ и } \beta + \sqrt{M}.\,\alpha = 0.$$

Въ этомъ случаѣ, если примемъ за основныя прямыя $\alpha = 0$, $\beta = 0$ эти двѣ двойныя прямыя, то уравненіе инволюціи обратится въ такое

$$\lambda + \mu = 0.$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что всякая пара сопряженныхъ элементовъ инволюціи составляетъ съ двойными ея элементами гармоническую группу.

Если $M = 0$, то $\beta = 0$ будетъ единственнымъ двойнымъ элементомъ инволюціи и наконецъ, когда $M < 0$ двойныхъ элементовъ не существуетъ.

Такъ какъ общее уравненіе инволюціи

$$\lambda\mu + L(\lambda + \mu) + M = 0$$

содержитъ два коэффиціента L и M, то мы видимъ, что инволюціонная зависимость опредѣляется вполнѣ заданіемъ двухъ паръ сопряженныхъ элементовъ. Тогда всякій элементъ третьей пары опредѣлитъ шестой соотвѣтственный элементъ. Покажемъ, какъ выразить инволюціонную зависимость шести прямыхъ, проходящихъ черезъ одну точку. Принимая пару сопряженныхъ прямыхъ за основныя, мы получимъ уравненія 6-ти прямыхъ, составляющихъ инволюцію въ такомъ видѣ

$$\alpha = 0,\ \beta - \lambda_1\alpha = 0,\ \beta - \lambda_2\alpha = 0,$$

$$\beta = 0,\ \beta - \mu_1\alpha = 0,\ \beta - \mu_2\alpha = 0,$$

гдѣ коэффиціенты λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\lambda_1\mu_1 = M,\ \lambda_2\mu_2 = M.$$

Изъ послѣднихъ уравненій получаемъ уравненіе, выражающее инволюціонную зависимость, въ такомъ видѣ

$$\lambda_1\mu_1 = \lambda_2\mu_2.$$

Все, что сказано объ инволюціи пучковъ, отъ слова до слова можетъ быть примѣнено къ разсмотрѣнію двухъ рядовъ точекъ, расположенныхъ на одной прямой.

Задачи:

1. Круги, проходящіе черезъ двѣ заданныя точки пересѣкаются съ прямою въ двухъ рядахъ точекъ, составляющихъ инволюцію. Эта инволюція будетъ имѣть двойные элементы, если точки лежатъ по одну сторону прямой и не будетъ ихъ имѣть, если по разныя.

2. Стороны прямаго угла, вращающагося вокругъ вершины, образуютъ на всякой третьей прямой два ряда точекъ, образующихъ инволюцію безъ двойныхъ элементовъ.

3. Всякую инволюцію точекъ безъ двойныхъ элементовъ можно образовать вращеніемъ прямаго угла вокругъ нѣкоторой точки.

4. Показать, что шесть прямыхъ, получаемыхъ черезъ соединеніе нѣкоторой точки плоскости съ шестью вершинами полнаго четыреугольника, образуютъ инволюцію; причемъ сопряженными элементами будутъ прямыя, проведенныя къ противоположнымъ вершинамъ.

5. Составить на основаніи закона двойственности предложеніе относительно рядовъ точекъ, аналогичное съ высказаннымъ въ предыдущей задачѣ.

Прямыя линіи, опредѣляемыя уравненіями высшихъ степеней.

79. Мы видѣли уже, что прямая линія опредѣляется уравненіемъ первой степени относительно координатъ x, y. Уравненія высшихъ степеней, какъ это мы увидимъ изъ дальнѣйшаго, опредѣляютъ обыкновенно криволинейныя геометрическія мѣста. Такъ напр., линіею втораго порядка называется геометрическое мѣсто точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію второй степени

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (1)$$

Кругъ есть одна изъ линій 2-го порядка, ибо его ур., какъ мы уже видѣли, есть частный случай уравненія общаго (1). Главною цѣлью нашихъ дальнѣйшихъ разсужденій будетъ изученіе вида и свойствъ различныхъ линій 2-го порядка, которыя можно получать задавая различныя значенія коэффиціентовъ A, B, C, D, E, F.

Но иногда уравненія высшихъ степеней опредѣляютъ одну или нѣсколько прямыхъ. Разсмотримъ нѣсколько подобныхъ случаевъ.

80. Предположимъ, что первая часть уравненія (1) линіи 2-го подрядка есть полный квадратъ первой части уравненія нѣкоторой прямой. Напр., возьмемъ уравненіе

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0.$$

Это уравненіе можетъ быть написано такъ:

$$(x + y + 1)^2 = 0$$

и, очевидно, равносильно уравненію

$$x + y + 1 = 0.$$

Итакъ, мы видимъ, что линія втораго порядка, опредѣляемая заданнымъ уравненіемъ, обращается въ прямую

$$x + y + 1 = 0.$$

81. Разсмотримъ уравненіе

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0.$$

Это уравненіе можетъ быть написано такъ

$$(x+y)^2+2(x+y)=0,$$

или еще такъ

$$(x+y).(x+y+2)=0.$$

Когда произведеніе двухъ множителей равно нулю, тогда долженъ быть равенъ нулю одинъ изъ множителей, или множитель $(x+y)$, или множитель $(x+y+2)$. Оба предположенія возможны, а потому мы получаемъ два уравненія

$$x+y=0,\ x+y+2=0.$$

Линія втораго порядка опредѣляемая заданнымъ уравненіемъ есть ничто иное, какъ система двухъ параллельныхъ прямыхъ

$$x+y=0,\ x+y+2=0.$$

82. Возьмемъ уравненіе

$$x^2-y^2-2x+1=0.$$

Это уравненіе можетъ быть переписано такъ

$$(x^2-2x+1)-y^2=0,$$

или такъ

$$(x-1)^2-y^2=0.$$

Разность квадратовъ въ первой части уравненія можетъ быть разложена на два множителя, такъ что получится

$$(x-1+y).(x-1-y)=0.$$

Итакъ, мы видитъ, что линія втораго порядка, опредѣляемая уравненіемъ

$$x^2-y^2-2x+1=0,$$

есть ничто иное какъ система двухъ пересѣкающихся прямыхъ

$$x-1+y=0,\ x-1-y=0.$$

Эти прямыя пересѣкаются въ точкѣ

$$x=1,\ y=0.$$

83. Резюмируя сказанное въ послѣднихъ трехъ параграфахъ мы замѣчаемъ, что, если задано n прямыхъ уравненіями $\alpha = 0$, $\beta = 0, \ldots$ $\omega = 0$; то уравненіе, получаемое отъ умноженія ихъ

$$\alpha \,.\, \beta \,.\, \gamma \ldots \omega = 0$$

будетъ n-ой степени относительно x и y и будетъ представлять тотъ частный случай, когда уравненіе n-ой степени опредѣляетъ систему n прямыхъ. Если всѣ множители $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega$ одинаковы, то мы получаемъ уравненіе n-ой степени $\alpha^n = 0$, опредѣляющее одну прямую $\alpha = 0$.

84. Вообще говоря, мы можемъ сказать, что если уравненіе какой нибудь степени $U = 0$ имѣетъ первую часть U, разлагающуюся на множители низшихъ степеней

$$U = L \,.\, M \,.\, N \ldots,$$

то геометрическое мѣсто опредѣляемое этимъ уравненіемъ есть совокупность геометрическихъ мѣстъ, опредѣляемыхъ уравненіями

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0, \ldots$$

Такъ напр., уравненіе

$$x^3 + xy^2 - x = 0$$

можетъ быть представлено въ видѣ

$$x \,.\, (x^2 + y^2 - 1) = 0$$

и, слѣдовательно, опредѣляетъ геометрическое мѣсто, состоящее изъ оси y-овъ и круга

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

85. Однороднымъ уравненіемъ n-ой степени между двумя координатами называется уравненіе вида

$$(1) \quad y^n + A_1 y^{n-1} x + A_2 y^{n-2} x^2 + \ldots + A_{n-1} y x^{n-1} + A_n x^n = 0$$

во всѣхъ членахъ котораго сумма показателей надъ x и надъ y одинакова и равна n показателю степени уравненія.

Относительно уравненія (1) мы замѣчаемъ, что дѣля это уравненіе на x^n и подставляя $\frac{y}{x} = \rho$, получимъ уравненіе

$$(2) \qquad \rho^n + A_1 \rho^{n-1} + A_2 \rho^{n-2} + \ldots + A_{n-1} \rho + A_n = 0.$$

Предположимъ теперь, что всѣ n корней уравненія (2) дѣйствительны и пусть они будутъ

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots \rho_n.$$

Тогда мы замѣчаемъ, что уравненіе (1) равносильно совокупности уравненій

$$(3) \qquad y=\rho_1 x,\ y=\rho_2 x,\ y=\rho_3 x, \dots y=\rho_n x$$

и, слѣдовательно, опредѣляетъ систему прямыхъ (3).

Всѣ эти прямыя проходятъ черезъ начало координатъ и составляютъ съ осью x-овъ углы, тангенсы которыхъ равны $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_n$. Въ дѣйствительности будетъ менѣе чѣмъ n различныхъ прямыхъ, если нѣкоторые изъ корней $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots \rho_n$ будутъ равными или мнимыми. Такъ напримѣръ, если корень ρ_1 мнимый, то уравненіе $y=\rho_1 x$ кромѣ начала координатъ, координаты котораго удовлетворяютъ очевидно уравненію, не опредѣляетъ никакого геометрическаго мѣста.

Иногда говорятъ, что уравненіе $y=\rho_1 x$ опредѣляетъ и при ρ_1 мнимомъ такъ называемую *мнимую* прямую, проходящую черезъ начало координатъ; а тогда можно высказать общее заключеніе. Всякое однородное уравненіе n-ой степени опредѣляетъ n прямыхъ проходящихъ черезъ начало координатъ. Конечно, при этомъ надо помнить, что нѣкоторыя изъ этихъ прямыхъ могутъ совпадать другія дѣлаться мнимыми.

86. Если всѣ n прямыхъ, опредѣляемыхъ однороднымъ уравненіемъ, мнимыя, тогда это уравненіе опредѣляетъ въ дѣйствительности только одну точку, а именно начало координатъ, ибо оно удовлетворяется только для значеній

$$x=0,\ y=0.$$

Напримѣръ, уравненіе

$$x^2+y^2=0$$

опредѣляетъ начало координатъ, ибо сумма двухъ квадратовъ дѣйствительныхъ чиселъ не иначе можетъ равняться нулю, какъ если оба квадрата одновременно равны нулю, что даетъ

$$x^2=0,\ y^2=0;\ x=0,\ y=0,$$

т. е. координаты начала. Заданное уравненіе, очевидно, однородное, а потому поступая по указанному пріему мы получимъ

$$1+\frac{y^2}{x^2}=0,\ \rho^2+1=0,$$

откуда

$$\rho_1=+\sqrt{-1},\ \rho_2=-\sqrt{-1};$$

обѣ прямыя, опредѣляемыя нашимъ уравненіемъ мнимыя и имѣютъ уравненія.

$$y=\sqrt{-1}\,.\,x,\ y=-\sqrt{-1}\,.\,x.$$

87. Вообще говоря, если заданное уравненіе можетъ быть приведено къ виду

$$U^2+V^2=0, \qquad (1)$$

то оно опредѣляетъ систему точекъ, лежащихъ на пересѣченіи двухъ кривыхъ $U=0$, $V=0$, ибо уравненію (1) не иначе возможно удовлетворить дѣйствительными значеніями координатъ, а, слѣдовательно, и величинъ U и V, которыя отъ этихъ координатъ зависятъ, какъ полагая совмѣстно $U=0$ и $V=0$, и, слѣдовательно, координаты точекъ геометрическаго мѣста (1) должны удовлетворять заразъ двумъ уравненіямъ $U=0$ и $V=0$. Напримѣръ, уравненіе

$$(x^2-1)^2+(y^2-1)^2=0$$

опредѣляетъ точки пересѣченія геометрическихъ мѣстъ, опредѣляемыхъ уравненіями

$$x^2-1=0,\ y^2-1=0$$

и, слѣдовательно, заданное уравненіе опредѣляетъ четыре точки, лежащія въ вершинахъ четыреугольника, образуемаго прямыми

$$x=1,\ x=-1,\ y=1,\ y=-1.$$

88. Прежде чѣмъ перейдемъ къ подробному изученію линій втораго порядка, найдемъ условіе, при которомъ уравненіе

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (1)$$

опредѣляетъ двѣ прямыя.

Напишемъ это уравненіе въ формѣ

$$Ax^2+(By+D)\,x+Cy^2+Ey+F=0.$$

Если A не равно нулю, то рѣшая это квадратное уравненіе получимъ

$$x = -\frac{By + D}{2A} \pm$$

$$\frac{1}{2A} \sqrt{(B^2 - 4AC)\, y^2 + 2\,(BD - 2AE)\, y + D^2 - 4\,AF}$$

Это уравненіе только тогда приведется къ виду $x = my + n$, когда подкоренная величина будетъ полный квадратъ, а это будетъ, очевидно, когда

$$(B^2 - 4AC)\ (D^2 - 4AF) = (BD - 2AE)^2.$$

Раскрывая скобки и сокращая на $4A$, получимъ

$$AE^2 + CD^2 + BF^2 - BDE - 4ACF = 0 \qquad (2)$$

что и есть искомое условіе того, что уравненіе (1) опредѣляетъ двѣ прямыя. Первая часть уравненія (2) называется *дискриминантомъ* уравненія (1).

89. Разсмотримъ напримѣръ уравненіе

$$(\alpha x + \beta y - r^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - r^2)\ (x^2 + y^2 - r^2)$$

и покажемъ, что если $\alpha^2 + \beta^2 > r^2$, то это уравненіе опредѣляетъ ничто иное, какъ двѣ касательныя, проведенныя къ кругу $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ изъ точки съ координатами (α, β). Раскрывая скобки въ уравненіи получимъ

$$(\alpha x + \beta y)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)\,(y^2 + y^2) - r^2 .\ [2\,(\alpha x + \beta y) - x^2 - y^2 - \alpha^2 - \beta^2] = 0$$

Воспользуемся тождествомъ

$$(\alpha^2 + \beta^2)\ (x^2 + y^2) - (\alpha x + \beta y)^2 = (\alpha y - \beta x)^2;$$

получимъ

$$(\alpha y - \beta x)^2 - r^2\ [(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] = 0,$$

откуда

$$[\alpha\ (y - \beta) - \beta\ (x - \alpha)]^2 - r^2\,[(x - \beta)^2 + (y - \beta)^2] = 0$$

и окончательно

$$(\alpha^2 - r^2)\ (x - \beta)^2 - 2\beta\alpha\ (x - \beta)\ (y - \beta) + (\beta^2 - r^2)\ (y - \beta)^2 = 0.$$

Это уравненіе однородное относительно $x - \alpha$ и $y - \beta$ поэтому опредѣляетъ двѣ прямыя, проходящія черезъ точку (α, β). Въ самомъ дѣлѣ, полагая $y - \beta = \rho\ (x - \alpha)$ получимъ для нахожденія ρ квадратное уравненіе

$$(\alpha^2 - r^2)\ \rho^2 - 2\alpha\beta\ \rho + \beta^2 - r^2 = 0.$$

Откуда окончательно

$$\rho = \frac{\alpha\beta \pm r\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - r^2}}{\alpha^2 - r^2}$$

Если

$$\alpha^2 + \beta^2 > r^2,$$

то оба корня ρ_1 и ρ_2 вещественные и, слѣдовательно, уравненія

$$y - \beta = \rho_1 (x - \alpha), \ y - \beta = \rho_2 (x - \alpha)$$

опредѣляютъ двѣ прямыя, проходящія черезъ точку (α, β); что эти прямыя касаются къ кругу $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ видно изъ того, что разстояніе начала координатъ до нихъ равно r, въ чемъ не трудно убѣдиться.

Задачи:

1. Что опредѣляетъ уравненіе $xy = 0$?

Отв. Двѣ оси кооординатъ.

2. Какое мѣсто опредѣляетъ уравненіе $x^2 - y^2 = 0$?

Отв. Биссекторы угловъ между осями.

3. Мѣсто, опредѣляемое уравненіемъ $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$?

Отв. $x - 2y = 0$, $x - 3y = 0$.

4. Какое мѣсто опредѣляетъ уравненіе $x^2 - 2xy \, Sec\,\theta + y^2 = 0$

Отв. $x = y \, tg\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\theta}{2}\right)$.

5. Опредѣлить B такъ чтобы $x^2 + Bxy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$ опредѣляло прямыя линіи.

Отв. Отрѣзки на осяхъ получаются изъ уравненій $x^2 - 5x + 6 = 0$, $y^2 - 7y + 6 = 0$ корни ихъ суть $x = 2$, $x = 3$, $y = 1$, $y = 6$.

Составляя уравненія линій, соединяющихъ найденныя точки мы видимъ, что, если уравненіе выражаетъ прямыя линіи, то оно должно дать одну или другую изъ формъ

$$(x + 2y - 2)(2x + y - 6) = 0, \ (x + 3y - 3)(3x + y - 6) = 0,$$

откуда перемножая опредѣлимъ B.

Линіи втораго порядка.

90. Переходя къ изслѣдованію уравненія

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

въ общемъ видѣ, мы будемъ во всемъ дальнѣйшемъ оси координатъ предполагать прямоугольными. Это предположеніе мы имѣемъ право дѣлать, ибо мы вывели раньше формулы, при помощи которыхъ можемъ перейти отъ любой косоугольной системы координатъ къ системѣ прямоугольной. Такъ какъ формулы преобразованія однѣхъ координатъ въ другія всегда первой степени относительно координатъ, какъ старыхъ такъ и новыхъ, то уравненіе второй степени (1) отъ такого преобразованія координатъ обратится въ уравненіе тоже второй степени относительно новыхъ координатъ. Это новое уравненіе будетъ, очевидно, имѣть тотъ же видъ, что и уравненіе (1)

$$A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0.$$

Для удобства дальнѣйшихъ выкладокъ будемъ писать уравненіе (1) въ такомъ видѣ

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (A)$$

Уравненіе (A) отличается только множителемъ 2, присоединеннымъ къ нѣкоторымъ коэффиціентамъ.

91. Прежде чѣмъ обратиться къ классификаціи и изученію различныхъ видовъ линій 2-го порядка, мы замѣтимъ ихъ нѣкоторыя общія свойства.

Прежде всего мы замѣчаемъ, что уравненіе (1) заключаетъ 6 коэффиціентовъ, или, собственно говоря, пять параметровъ, получаемыхъ отъ дѣленія пяти изъ числа коэффиціентовъ на шестой, а потому линія втораго порядка опредѣляется изъ пяти условій. Можно требовать, напримѣръ, чтобы линія втораго порядка проходила черезъ 5 точекъ.

92. Намъ придется въ дальнѣйшемъ переносить начало координатъ въ точку a, b, оставляя направленіе осей прежнимъ. По извѣстнымъ уже намъ формуламъ преобразованія координатъ, мы замѣчаемъ, что уравненіе (A) обратится въ слѣдующее

$$A(x+a)^2 + 2B(x+a)(y+b) + C(y+b)^2 + 2(x+a)D +$$
$$+ 2E(y+b) + F = 0;$$

откуда получимъ новое уравненіе въ такомъ видѣ

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0,$$

причемъ мы замѣчаемъ, что коэффиціенты A, B, C при x^2, xy, y^2 не измѣнились отъ произведеннаго преобразованія координатъ, что касается до коэффиціентовъ D_1, E_1, F_1, то они равны

$$D_1 = Aa + Bb + D$$

$$E_1 = Ba + Cb + E$$

$$F_1 = Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F.$$

Итакъ, мы получаемъ въ высшей степени важное замѣчаніе, состоящее въ томъ, что независящій отъ координатъ членъ F_1 въ преобразованномъ уравненіи равенъ результату подстановки въ первую часть заданнаго уравненія координатъ новаго начала.

93. Линія втораго порядка пересѣкается всякою прямою въ двухъ точкахъ дѣйствительныхъ, совпадающихъ или мнимыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ прямую

$$y = mx + n; \tag{*}$$

координаты точки пересѣченія прямой (*) и линіи втораго порядка (A) удовлетворятъ сразу двумъ уравненіямъ (A) и (*), а потому координаты эти должны представлять систему рѣшеній относительно x и y двухъ уравненій (A) и (*). Исключаемъ сначала y, подставляя его выраженіе изъ уравненія (*), въ уравненіе (A), тогда получимъ для опредѣленія x квадратное уравненіе.

$$(^{**})\ Ax^2 + 2Bx\,(mx + n) + C\,(mx + n)^2 + 2Dx +$$
$$+ 2E\,(mx + n) + F = 0.$$

Итакъ, мы видимъ, что существуютъ двѣ точки пересѣченія прямой (*) съ линіей втораго порядка (A), абсциссы которыхъ получатся черезъ рѣшеніе уравненія (**) относительно x. Если корни послѣдняго уравненія оба дѣйствительные, то прямая (*) пересѣчетъ линію (A) въ двухъ дѣйствительныхъ точкахъ; если корни одинаковы, то обѣ точки пересѣченія обращаются въ одну точку, а сѣкущая (*) становится касательною; наконецъ, если корни уравненія (**) мнимые, то прямая не пересѣкаетъ линію втораго порядка.

Преобразованіе первой части уравненія линіи втораго порядка.

94. Всѣ наши разсужденія, касающіяся классиффикаціи и изученія вида линій втораго порядка будутъ основаны на одномъ алге-

браическомъ преобразованіи уравненія (A) § 90, состоящемъ въ выдѣленіи въ первой части уравненія квадратовъ линейныхъ функцій (*) отъ координатъ.

95. Прежде всего замѣтимъ, что мы всегда можемъ предполагать, что по крайней мѣрѣ одинъ изъ коэффиціентовъ A, B, C не равенъ нулю, ибо въ противномъ случаѣ уравненіе (A) обращается въ уравненіе первой степени

$$2Dx + 2Ey + F = 0$$

и опредѣляетъ, слѣдовательно, нѣкоторую прямую линію.

96. Оставляя до дальнѣйшаго случай равенства нулю обоихъ коэффиціентовъ A и C, мы здѣсь остановимся на случаѣ, когда одинъ изъ нихъ, напр. A не равенъ нулю.

Расположимъ первую часть уравненія по степенямъ координаты x, тогда получимъ

$$Ax^2 + 2x(By + D) + Cy^2 + 2Ey + F = 0. \qquad (A)$$

Умножимъ кромѣ того для удобства послѣднее уравненіе на A.

$$(Ax)^2 + 2Ax.(By + D) + ACy^2 + 2AEy + AF = 0.$$

Прибавляя къ первой части и вычитая изъ нея квадратъ двучлена $By + D$, получимъ

$$(Ax)^2 + 2Ax(By + D) + (By + D)^2 - (By + D)^2 +$$
$$+ ACy^2 + 2AEy + AF = 0.$$

Откуда получаемъ

$$[Ax + (By + D)]^2 - B^2y^2 - 2BDy - D^2 + ACy^2 +$$
$$+ 2AEy + AF = 0,$$

или окончательно

$$(Ax + By + D)^2 + Ly^2 + 2My + N = 0, \qquad (A')$$

гдѣ обозначено

$$L = AC - B^2,\ M = AE - BD,\ N = AF - D^2.$$

---

*) Линейною функціею отъ ξ, η, ς, ... τ называется выраженіе вида

$$a\xi + b\eta + e\varsigma + \ldots + \partial\tau + c.$$

Если $L=0$, тогда разложеніе первой части уравненія (A) окончено, ибо тогда уравненіе (A') получаетъ видъ

$$(Ax+By+D)^2+2My+N=0. \qquad (B)$$

Уравненіе (B) показываетъ, что въ случаѣ

$$AC-B^2=0,$$

по выдѣленіи квадрата линейной функціи

$$Ax+By+D$$

остается линейная функція

$$2My+N.$$

Итакъ, въ случаѣ $L=0$ получаемъ первый видъ линій втораго порядка, уравненіе которыхъ можетъ быть приведено къ виду

$$\alpha^2+\beta=0$$

гдѣ

$$\alpha=Ax+By+D,\ \beta=2My+N.$$

Переходимъ теперь къ случаю когда L не равно нулю. Въ этомъ случаѣ можно умножить уравненіе (A') на L и продолжать разложеніе на сумму квадратовъ далѣе. Получимъ

$$L(Ax+By+D)^2+L^2y^2+2LMy+LN=0.$$

Прибавляемъ къ первой части этого уравненія и вычитаемъ изъ нея M^2, тогда получаемъ

$$L(Ax+By+D)^2+(Ly)^2+2(Ly)M+M^2+LN-M^2=0,$$

или окончательно

$$L(Ax+By+D)^2+(Ly+M)^2+P=0, \qquad (C)$$

гдѣ

$$P=LN-M^2.$$

Уравненіе (C) представляетъ изъ себя окончательный результатъ разложенія первой части уравненія (A) на сумму квадратовъ линейныхъ функцій. По выдѣленіи двухъ квадратовъ линейныхъ функцій $Ax+By+D$ и $Ly+M$ остается постоянное число

$$P=LN-M^2.$$

Итакъ, въ случаѣ, когда L не $=0$, получаются кривыя втораго вида, уравненіе которыхъ можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ

$$L\alpha^2+\beta^2+P=0,$$

гдѣ

$$\alpha=Ax+By+D,\ \beta=Ly+M.$$

97. Напримѣръ, задано уравненіе

$$x^2-2xy+y^2+2x-1=0.$$

Переписывая въ такомъ видѣ:

$$x^2-2x\,(y-1)+y^2-1=0,$$

прибавляя и вычитая квадратъ $(y-1)^2$, получимъ

$$x^2-2x\,(y-1)+(y-1)^2-(y-1)^2+y^2-1=0,$$

откуда

$$[x-(y-1)]^2-(y^2-2y+1)+y^2-1=0;$$

$$(x-y+1)^2+2y-2=0.$$

Кривая принадлежитъ къ первому виду, ибо уравненіе ея представляется въ видѣ

$$\alpha^2+\beta=0,$$

гдѣ

$$\alpha=x-y+1,\ \beta=2y-2.$$

Возьмемъ уравненіе

$$2x^2-2xy+3y^2-2x+2y-1=0.$$

Умножимъ на 2

$$(2x)^2-2\,(2x)\,y+6y^2-2\,(2x)+4y-2=0,$$

или

$$(2x)^2-2\,(2x)\,(y+1)+6y^2+4y-2=0,$$

отсюда

$$[2x-(y+1)]^2-(y^2+2y+1)+6y^2+4y-2=0,$$

или

$$(2x-y-1)^2+5y^2+2y-3=0.$$

Умножая на 5, получимъ

$$5\,(2x-y-1)^2+25y^2+2\,(5y)+1-16=0,$$

или окончательно

$$5(2x-y-1)^2+(5y+1)^2-16=0.$$

Получается линія втораго порядка втораго вида, ибо заданное уравненіе можно представить въ видѣ:

$$L\alpha^2+\beta^2+P=0,$$

гдѣ

$$L=5,\ \alpha=2x-y-1,\ \beta=5y+1,\ P=16.$$

Изслѣдованіе уравненія (A) въ случаѣ $AC-B^2=0$.

98. Итакъ, мы обращаемся къ разсмотрѣнію линій втораго порядка перваго рода, т. е. когда уравненіе (A) можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ

$$\alpha^2+\beta=0, \tag{B}$$

гдѣ

$$\alpha=Ax+By+D,\ \beta=2My+N,$$

а

$$M=EA-BD,\ N=AF-D^2.$$

99. Замѣтимъ прежде всего, что условіе $AC-B^2=0$ показываетъ, что первые три члена $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ составляютъ полный квадратъ линейной функціи.

Въ самомъ дѣлѣ, если

$$AC-B^2=0,$$

то

$$C=\frac{B^2}{A}$$

и мы получимъ

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=Ax^2+2Bxy+\frac{B^2}{A}y^2=$$

$$=\frac{1}{A}(A^2x^2+2ABxy+B^2y^2)=\left[\frac{1}{\sqrt{A}}(Ax+By)\right]^2$$

100. Разсмотримъ сначала геометрическія мѣста, опредѣляемыя уравненіемъ (B) въ томъ случаѣ, когда β постоянное, другими сло-

или, когда $M=0$; такъ что $\beta=N$. Этотъ случай разбивается въ свою очередь на три слѣдующихъ:

$$N>0,\ N=0,\ N<0.$$

101. Въ первомъ случаѣ, т. е. когда $N>0$, уравненіе $\alpha^2+N=0$ не можетъ удовлетворяться ни при какихъ вещественныхъ значеніяхъ координатъ x и y, ибо первая часть этого уравненія есть сумма двухъ членовъ: N большаго нуля и другаго положительнаго числа α^2. Ни при какихъ значеніяхъ координатъ α^2 не можетъ быть сдѣланъ меньше нуля и, слѣдовательно, сумма $N+\alpha^2$ будучи не менѣе положительнаго числа N не можетъ равняться нулю. Итакъ, въ случаѣ $N>0$ уравненіе $\alpha^2+N=0$ не опредѣляетъ никакого геометрическаго мѣста.

102. Обращаемся къ случаю $N=0$, тогда уравненіе $\alpha^2+N=0$ обращается въ слѣдующее

$$\alpha^2=0,$$

или, что одно и то же,

$$\alpha=0.$$

Опредѣляемое уравненіемъ

$$\alpha^2+N=0$$

въ этомъ случаѣ геометрическое мѣсто есть прямая

$$\alpha=Ax+By+D=0.$$

103. Наконецъ въ случаѣ $N<0$ получимъ двѣ параллельныя прямыя. Въ самомъ дѣлѣ, если N отрицательно, то можно положить

$$N=-\delta^2,$$

гдѣ δ нѣкоторое вещественное число, и тогда уравненіе

$$\alpha^2+N=0$$

обратится въ слѣдующее

$$\alpha^2-\delta^2=0,\quad (\alpha+\delta)(\alpha-\delta)=0,$$

которое, въ свою очередь, разбивается на два слѣдующихъ

$$\alpha+\delta=0,\ \alpha-\delta=0.$$

Эти уравненія опредѣляютъ двѣ параллельныя прямыя

$$Ax+By+(D+\delta)=0,\ Ax+By+(D-\delta)=0.$$

Примѣры:

1. Пусть задано уравненіе

$$x^2 + 2xy + y^2 + 1 = 0.$$

Это уравненіе можно написать такъ:

$$(x + y)^2 + 1 = 0.$$

Уравненіе не опредѣляетъ никакого геометрическаго мѣста.

2. Задано уравненіе

$$x^2 + 2xy + y^2 = 0.$$

Это уравненіе можно написать такъ

$$(x + y)^2 = 0, \quad \text{или} \quad x + y = 0$$

и, слѣдовательно, оно опредѣляетъ прямую, дѣлящую пополамъ углы, второй и четвертый между осями координатъ.

3. $$x^2 + 2xy + y^2 - 4 = 0.$$

Это уравненіе можетъ быть написано такъ

$$(x + y)^2 - 2^2 = 0; \ (x + y + 2)\,(x + y - 2) = 0.$$

Заданное уравненіе опредѣляетъ двѣ параллельныя прямыя

$$x + y + 2 = 0; \ x + y - 2 = 0.$$

104. Резюмируя сказанное относительно случая, когда β постоянное, мы можемъ сказать, что въ этомъ случаѣ линія 2-го порядка обращается въ систему двухъ параллельныхъ прямыхъ, причемъ эти прямыя могутъ быть разныя, совпадающія или мнимыя.

Парабола.

105. Обращаемся теперь къ болѣе общему случаѣ, когда коэффиціентъ M не равенъ нулю. Въ этомъ случаѣ β есть линейная функція

$$2My + N.$$

Линія второго порядка, опредѣляемая въ этомъ случаѣ уравненіемъ

$$\alpha^2 + \beta = 0,$$

есть нѣкоторая особая кривая линія, называемая *параболою*.

106. Итакъ, мы приступимъ къ изученію вида и свойствъ параболы. Изъ уравненія

$$\alpha^2 + \beta = 0$$

очевидно, что на разсматриваемой кривой лежитъ точка пересѣченія двухъ прямыхъ

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0,$$

ибо координаты этой точки удовлетворяютъ заразъ двумъ уравненіямъ

$$\alpha = 0, \; \beta = 0$$

и, слѣдовательно, удовлетворяютъ также и уравненію

$$\alpha^2 + \beta = 0.$$

Будемъ разсматривать точки пересѣченія заданной параболы съ прямыми, параллельными прямымъ

$$\alpha = 0, \; \beta = 0.$$

107. Общій видъ уравненія прямой параллельной $\alpha = 0$ есть $\alpha = k$, гдѣ k какое-нибудь заданное число; если это число положительное, то прямая $\alpha = k$ лежитъ по одну сторону прямой $\alpha = 0$, а если оно отрицательное, то по другую. Двѣ прямыя

$$\alpha = + k \text{ и } \alpha = - k$$

лежатъ съ разныхъ сторонъ относительно прямой $\alpha = 0$ и, какъ легко сообразить, на основаніи изложеннаго въ § 32, онѣ лежатъ на одинаковомъ разстояніи отъ послѣдней, такъ что прямая $\alpha = 0$ лежитъ по срединѣ между прямыми

$$\alpha = + k \text{ и } \alpha = - k.$$

Это замѣчаніе будетъ играть существенную роль во всѣхъ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ.

Итакъ, займемся сначала сѣкущими $\alpha = k$, параллельными прямой $\alpha = 0$. Легко показать, что всѣ такія сѣкущія пересѣкаютъ параболу въ одной точкѣ. Въ самомъ дѣлѣ, точки пересѣченія сѣкущей $\alpha = k$ съ параболою

$$\alpha^2 + \beta = 0$$

опредѣляются координатами, удовлетворяющими заразъ двумъ уравненіямъ

$$\alpha = k \quad \text{и} \quad \alpha^2 + \beta = 0,$$

а потому, чтобы получить искомыя координаты, надо рѣшить относительно x и y два уравненія

$$\alpha = k, \quad \alpha^2 + \beta = 0.$$

Послѣднюю систему уравненій, прежде чѣмъ рѣшать относительно x и y, мы имѣемъ право подвергнуть любому тождественному преобразованію, а именно, замѣною α на k, на основаніи перваго уравненія, мы можемъ второе уравненіе написать такъ

$$k^2 + \beta = 0,$$

откуда мы видимъ, что координаты точекъ пересѣченія могутъ быть опредѣлены изъ такой системы уравненій

$$\alpha = k, \quad k^2 + \beta = 0.$$

Оба послѣднія уравненія первой степени относительно x и y, а потому опредѣляютъ двѣ прямыя линіи, пересѣкающіяся въ одной точкѣ; эта послѣдняя точка и будетъ не что иное, какъ пересѣченіе прямой $\alpha = k$ съ параболою

$$\alpha^2 + \beta = 0.$$

108. Обращаемся теперь къ сѣкущимъ $\beta = k$, параллельнымъ прямой $\beta = 0$.

Координаты точекъ пересѣченія прямой $\beta = k$ и параболы

$$\alpha^2 + \beta = 0,$$

опредѣляется черезъ рѣшеніе относительно x и y системы уравненій

$$\beta = k, \quad \alpha^2 + \beta = 0.$$

Послѣдняя система можетъ быть замѣнена слѣдующею

$$\beta = k, \quad \alpha^2 + k = 0.$$

Уравненіе $\alpha^2 + k = 0$ при $k > 0$ не можетъ быть удовлетворено никакими дѣйствительными значеніями координатъ x и y, а потому прямая $\beta = k$ при $k > 0$ не пересѣкаетъ параболы

$$\alpha^2 + \beta = 0$$

и, слѣдовательно, парабола лежитъ съ той стороны $\beta = 0$, съ которой β отрицательно.

Итакъ, будемъ искать точки пересѣченія параболы

$$\alpha^2 + \beta = 0$$

съ прямою $\beta = k$, гдѣ $k < 0$. Въ этомъ случаѣ число k можно приравнять квадрату нѣкотораго дѣйствительнаго числа, взятому со знакомъ минусъ, а именно $k = -\delta^2$.

Прямая $\beta = 0$ параллельна оси x-овъ, ибо ея уравненіе имѣетъ видъ

$$2My + N = 0,$$

откуда

$$y = -\frac{N}{2M}.$$

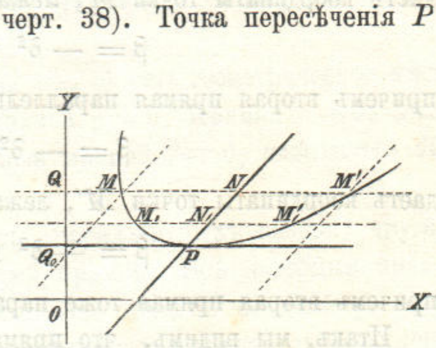
Прямая же $\alpha = 0$, вообще говоря, не параллельна ни одной изъ осей, ибо ея уравненіе имѣетъ видъ

$$Ax + By + D = 0,$$

гдѣ A и B не равны нулю (см. черт. 38). Точка пересѣченія P прямыхъ $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ лежитъ, какъ мы уже сказали на искомой параболѣ. Положимъ, что

$$-\frac{N}{2M} > 0,$$

тогда прямая $\beta = 0$ лежитъ такъ, какъ это показано на чертежѣ, если, кромѣ того начало координатъ лежитъ съ той стороны прямой $\beta = 0$, съ которой β положительно, то вся парабола лежитъ по другую сторону прямой $\beta = 0$ относительно начала, т. е. опять таки такъ, какъ это показано на чертежѣ.



Черт. 38.

Покажемъ теперь, что каждая изъ прямыхъ

$$\beta = -\delta^2$$

пересѣкаетъ параболу въ двухъ точкахъ. Въ самомъ дѣлѣ, мѣняя величину δ мы будемъ получать различныя прямыя MM', M_1M_1', параллельныя прямой $\beta = 0$ и лежащія съ той стороны, гдѣ находится парабола.

Для нахожденія координатъ точекъ пересѣченія прямой

$$\beta = -\delta^2$$

съ параболой, необходимо рѣшить относительно x и y два уравненія

$$\beta = -\delta^2 \text{ и } \alpha^2 + \beta = 0;$$

эта система уравненій равносильна со слѣдующей

$$\beta = -\delta^2,\quad \alpha^2 - \delta^2 = 0,$$

или, что одно и то же,

$$\beta = -\delta^2,\ (\alpha + \delta)\ (\alpha - \delta) = 0.$$

Послѣдняя система уравненій равносильна двумъ системамъ

$$\left.\begin{array}{r}\beta = -\delta^2\\ \alpha + \delta = 0\end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{r}\beta = -\delta^2\\ \alpha - \delta = 0\end{array}\right\}.$$

Первая система

$$(\beta = -\delta^2,\ \alpha = -\delta)$$

даетъ координаты точки M, лежащей на пересѣченіи прямыхъ

$$\beta = -\delta^2 \text{ и } \alpha = -\delta,$$

причемъ вторая прямая параллельна прямой $\alpha = 0$. Вторая система

$$\beta = -\delta^2,\ \alpha = +\delta$$

даетъ координаты точки M', лежащей на пересѣченіи прямыхъ

$$\beta = -\delta^2 \text{ и } \alpha = +\delta,$$

причемъ вторая прямая тоже параллельна прямой $\alpha = 0$.

Итакъ, мы видимъ, что прямая $\beta = -\delta^2$ пересѣкаетъ искомую параболу въ двухъ точкахъ M и M'. Точно также мы покажемъ, что всякая другая прямая $\beta = -\delta_1{}^2$, параллельная прямой $\beta = 0$, пересѣкаетъ искомую параболу въ двухъ точкахъ M_1 и M'_1.

По мѣрѣ уменьшенія величины δ точки M и M' сближаются, такъ что, когда $\delta = o$, то прямая $\beta = -\delta^2$ обращается въ касательную.

109. Покажемъ теперь, что прямая $\alpha = 0$ пересѣкаетъ всѣ хорды MM', $M_1 M_1'$, параллельныя прямой $\beta = 0$ въ точкахъ N, N_1, дѣлящихъ эти хорды пополамъ.

Возьмемъ нѣкоторую изъ разсматриваемыхъ нами хордъ, напр. MM' и пусть уравненіе этой хорды будетъ

$$\beta = -\delta^2,$$

гдѣ δ нѣкоторое дѣйствительное число. Координаты концовъ M и M' хорды MM' будутъ опредѣляться системами:

$$(M)\ldots\ldots \begin{cases} \beta = -\delta^2 \\ \alpha = -\delta \end{cases} \qquad (M')\ldots\ldots \begin{cases} \beta = -\delta^2 \\ \alpha = +\delta \end{cases}.$$

Координаты же точки N, въ которой хорду $\beta = -\delta^2$ пересѣкаетъ прямая $\alpha = 0$, опредѣляются изъ слѣдующей системы

$$(N)\ldots\ldots \begin{cases} \beta = -\delta^2 \\ \alpha = 0 \end{cases}.$$

Итакъ, мы видимъ, что точки M, N, M' опредѣляются, какъ пересѣченіе прямой $\beta = -\delta^2$ тремя прямыми

$$\alpha = -\delta, \quad \alpha = 0, \quad \alpha = +\delta.$$

Послѣднія три прямыя параллельны между собой и находятся въ равномъ разстояніи другъ отъ друга, откуда заключаемъ, что точка N есть средина хорды MM'.

Итакъ, мы видимъ, что прямая $\alpha = 0$ есть геометрическое мѣсто срединъ хордъ, параллельныхъ прямой $\beta = 0$. Прямая $\alpha = 0$, дѣлящая пополамъ хорды, параллельныя прямой $\beta = 0$, называется *діаметромъ* параболы.

Покажемъ, что средины хордъ, параллельныхъ всякому другому направленію, лежатъ на нѣкоторой прямой. Всѣ подобныя прямыя называются *діаметрами* параболы. Это опредѣленіе діаметра перенесено съ круга, ибо въ кругѣ средины хордъ, параллельныхъ между собой, лежатъ всегда на нѣкоторомъ діаметрѣ.

Итакъ, обращаемся къ разсмотрѣнію хордъ, не параллельныхъ прямой $\beta = 0$.

110. Докажемъ предварительно слѣдующую лемму.

Лемма. Заданы двѣ линейныя функціи

$$\alpha = Ax + By + D, \quad \beta = 2My + N.$$

Уравненіе всякой прямой

$$A_0 x + B_0 y + C_0 = 0 \tag{1}$$

можетъ быть написано въ такомъ видѣ

$$l\alpha + m\beta + n = 0, \tag{2}$$

гдѣ l, m, n суть нѣкоторыя числа.

Въ самомъ дѣлѣ, числа l, m, n могутъ быть опредѣлены, сравнивая коэффиціенты въ уравненіяхъ (1) (2).

Уравненіе (2) можетъ быть написано такъ

$$l(Ax + By + D) + m(2My + N) + n = 0$$

$$lAx + (lB + 2mM)y + lD + mN + n = 0. \tag{2'}$$

Для того чтобы уравненіе (2′) совпало съ уравненіемъ (1), необходимо приравнять коэффиціенты при x и y и членъ, независящій отъ координатъ, въ одномъ уравненіи коэффиціентамъ и члену въ другомъ. Получимъ три уравненія

$$lA = A_0,\quad lB + 2mM = B_0,\quad lD + mN + n = C_0,$$

откуда получаемъ для l, m, n выраженія

$$l = \frac{A_0}{A},\quad m = \frac{B_0 A - A_0 B}{2AM},$$

$$n = \frac{C_0 A - A_0 D}{A} + N\,\frac{BA_0 - AB_0}{2MA}.$$

Примѣръ:

$$\alpha = x + y + 1,\ \beta = 2y - 1,$$

требуется уравненіе

$$3x - 2y + 1 = 0 \tag{*}$$

написать въ видѣ

$$l\alpha + m\beta + n = 0.$$

Уравненіе

$$l(x + y + 1) + m(2y - 1) + n = 0$$

можетъ быть написано въ такомъ видѣ

$$lx + (l + 2m)y + l - m + n = 0;$$

сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ (*), мы получимъ

$$l = 3,\quad l + 2m = -2,\quad l - m + n = 1,$$

откуда получимъ

$$l = 3, \quad m = -\frac{5}{2}, \quad n = 1 - 3 - \frac{5}{2} = -\frac{9}{2}.$$

Уравненіе (*) можетъ быть окончательно представлено въ слѣдующемъ видѣ

$$3\alpha - \frac{5}{2}\beta - \frac{9}{2} = 0.$$

Для рѣшенія той же задачи можно было-бы поступать еще такъ рѣшаемъ уравненія

$$\alpha = x + y + 1 \text{ и } \beta = 2y - 1$$

относительно x и y и получаемъ

$$y = \frac{\beta + 1}{2}, \quad x = \alpha - 1 - \frac{\beta + 1}{2};$$

подставляя полученныя выраженія для x и y въ уравненіе

$$3x - 2y + 1 = 0,$$

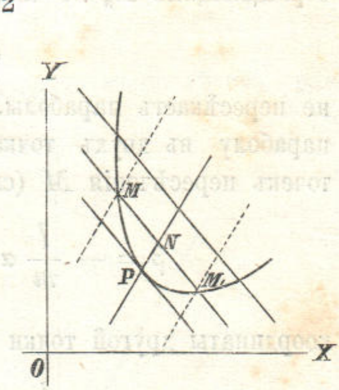
получаемъ

$$3\left(\alpha - 1 - \frac{\beta + 1}{2}\right) - 2\,\frac{\beta + 1}{2} + 1 = 0,$$

откуда окончательно

$$3\alpha - \frac{5}{2}\beta - \frac{9}{2} = 0,$$

что совпадаетъ съ полученнымъ уже результатомъ.



Черт. 39.

111. Будемъ разсматривать теперь хорды, параллельныя нѣкоторой прямой

$$l\alpha + m\beta + n = 0.$$

Уравненія всѣхъ этихъ хордъ мы получимъ, оставляя l, m безъ перемѣны и мѣняя n.

Предположимъ, что мы задаемъ для числа n нѣкоторое опредѣленное значеніе, тогда получаемъ нѣкоторую прямую, которая пересѣкаетъ параболу въ двухъ точкахъ M и M' (черт. 39), координаты которыхъ опредѣлятся черезъ рѣшеніе относительно x и y системы уравненій

$$\left.\begin{aligned} l\alpha + m\beta + n = 0 \\ \alpha^2 + \beta = 0 \end{aligned}\right\}$$

Эта система можетъ быть замѣнена слѣдующею

$$\begin{cases} \beta = -\dfrac{l}{m}\alpha - \dfrac{n}{m} \\ \alpha^2 - \dfrac{l}{m}\alpha - \dfrac{n}{m} = 0 \end{cases}$$

Послѣднее изъ уравненій можетъ быть рѣшено относительно α и мы тогда получимъ

$$\alpha = \frac{l}{2m} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4m^2} + \frac{n}{m}} = \frac{l}{2m} \pm \sqrt{R_n}.$$

Если $R_n > 0$, такъ что корень $\sqrt{R_n}$ вещественный, тогда существуютъ двѣ точки пересѣченія M и M' хорды $\overline{MM'}$ съ параболою. Въ случаѣ $R_n = 0$ обѣ точки пересѣченія сливаются въ одну и хорда обращается въ касательную къ параболѣ. Для значеній коэффиціента n, обращающихъ R_n въ число отрицательное, прямая

$$l\alpha + m\beta + n = 0$$

не пересѣкаетъ параболы. Въ томъ случаѣ, когда хорда пересѣкаетъ параболу въ двухъ точкахъ, мы получимъ координаты одной изъ точекъ пересѣченія M (см. черт. 39) изъ системы уравненій:

$$\beta = -\frac{l}{m}\alpha - \frac{n}{m}, \quad \alpha = \frac{l}{2m} + \sqrt{R_n};$$

координаты другой точки M' мы получимъ изъ системы:

$$\beta = -\frac{l}{m}\alpha - \frac{n}{m}, \quad \alpha = \frac{l}{2m} - \sqrt{R_n}.$$

Точка N лежитъ на прямой

$$\beta = -\frac{l}{m}\alpha - \frac{n}{m}$$

по срединѣ между точками M и M' и слѣдовательно, можетъ быть, опредѣлена, какъ пересѣченіе прямой

$$\beta = -\frac{l}{m}\alpha - \frac{n}{m}$$

съ прямой

$$\alpha = \frac{l}{2m}.$$

Будемъ брать разныя хорды, параллельныя хордѣ $\overline{MM'}$. Перемѣна положенія хорды соотвѣтствуетъ измѣненію коэффиціента n, но при этомъ всегда средина хорды лежитъ на прямой

$$\alpha = \frac{l}{2m}$$

и, слѣдовательно, каждой системѣ параллельныхъ хордъ

$$l\alpha + m\beta + n = 0$$

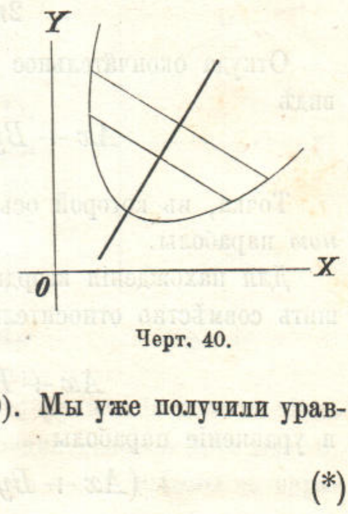
будетъ соотвѣтствовать вполнѣ опредѣленный діаметръ

$$\alpha = \frac{l}{2m}.$$

Итакъ, мы видимъ, что всѣ діаметры имѣютъ уравненіе

$$\alpha = \frac{l}{2m}$$

и мы получимъ различные діаметры, подставляя въ послѣднее уравненіе различныя значенія для l и m. Видъ уравненія показываетъ, что всѣ діаметры параллельны между собою и параллельны діаметру $\alpha = 0$. Мы уже видѣли, что каждый изъ діаметровъ пересѣкаетъ параболу (B) только въ одной точкѣ.



Черт. 40.

112. Поищемъ теперь діаметръ перпендикулярный къ хордамъ, которыя онъ дѣлитъ пополамъ. Такой діаметръ называется *осью* параболы и относительно него парабола симметрична (см. черт. 40). Мы уже получили уравненіе діаметра

$$\alpha = \frac{l}{2m}, \tag{*}$$

дѣлящаго хорды

$$l\alpha + m\beta + n = 0 \qquad (^{**})$$

пополамъ. Остается подобрать l и m такъ, чтобы двѣ прямыя (*) и (**) были взаимно перпендикулярны. Наши уравненія (*) и (**) могутъ быть написаны такъ

$$Ax + By + D = \frac{l}{2m} \qquad (^{*})$$

$$l(Ax + By + D) + m(2My + N) + n = 0. \qquad (^{**})$$

Уравненіе (**) можно написать еще такъ

$$lAx + y(lB + 2mM) + lD + mN + n = 0. \qquad (^{**})$$

Для перпендикулярности уравненій (*) и (**) должно существовать условіе

$$1 + \left(-\frac{A}{B}\right) \cdot \left(-\frac{lA}{lB + 2mM}\right) = 0.$$

Раскрывая это условіе, мы получимъ

$$lB^2 + 2mBM + lA^2 = 0,$$

откуда

$$l(A^2 + B^2) + 2mBM = 0,$$

или

$$\frac{l}{2m} = -\frac{BM}{A^2 + B^2}.$$

Откуда окончательное уравненіе оси напишется въ слѣдующемъ видѣ

$$Ax + By + D = -\frac{BM}{A^2 + B^2}.$$

Точка, въ которой ось пересѣкаетъ параболу называется *вершиною* параболы.

Для нахожденія координатъ вершины параболы, необходимо рѣшить совмѣстно относительно x и y уравненіе оси

$$Ax + By + D = -\frac{BM}{A^2 + B^2}$$

и уравненіе параболы

$$(Ax + By + D)^2 + 2My + N = 0.$$

Легко видѣть, что вершина опредѣлится какъ пересѣченіе двухъ прямымъ

$$Ax + By + D = -\frac{BM}{A^2 + B^2}$$

$$2My + N = -\left(\frac{BM}{A^2 + B^2}\right)^2.$$

113. Уравненіе параболы приметъ особенно простой видъ, если мы перейдемъ къ новымъ координатамъ, причемъ за новую ось x-овъ возьмемъ ось симметріи параболы, новое начало помѣстимъ въ вершинѣ параболы, а новую ось y-овъ расположимъ параллельно хордамъ, которыя дѣлитъ попаламъ ось симметріи.

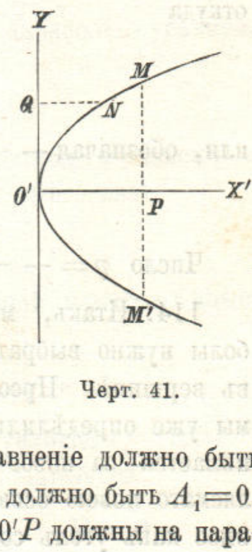
На основаніи сказаннаго относительно оси параболы мы заключаемъ, что новая ось y-овъ будетъ перпендикулярна къ оси симметріи параболы и будетъ касаться къ послѣдней въ вершинѣ. Послѣ преобразованія координатъ уравненіе параболы (B) приметъ видъ:

$$A_1 x'^2_1 + 2B_1 x'y' + C_1 y'^2 + 2D_1 x' + 2E_1 y' + F_1 = 0 \quad (A_1)$$

Прежде всего мы замѣчаемъ, что $F_1 = 0$. Въ самомъ дѣлѣ, новое начало координатъ $0'$ есть вершина параболы, отсюда мы видимъ, что координаты этого начала $x' = 0$, $y' = 0$ должны удовлетворять уравненію (A_1). Мы получаемъ

$$A_1 0 + 2B_1 0 + C_1 0 + 2D_1 0 + 2E_1 0 + F_1 = 0,$$

откуда выходитъ $F_1 = 0$.



Черт. 41.

Для каждаго заданнаго значенія для y'-ка напр. для значенія $y' = +\overline{0'Q}$ (см. черт. 41), мы должны получить только одно значеніе для x' равное $+\overline{QN}$, ибо прямая QN, параллельная оси параболы, есть нѣкоторый діаметръ параболы и, слѣдовательно, по доказанному пересѣкаетъ параболу только въ одной точкѣ N.

Итакъ, мы видимъ, что уравненіе (A_1) должно для каждаго значенія y' давать только одно значеніе для x' и, слѣдовательно, это уравненіе должно быть первой степени относительно x', другими словами, должно быть $A_1 = 0$.

Съ другой стороны каждой абсциссѣ $x' = +0'P$ должны на параболѣ соотвѣтствовать двѣ точки M и M' имѣющія равныя по абсолютной величинѣ ординаты, но разныхъ знаковъ; такъ что для точки M

$$y' = + PM,$$

а для точки M'

$$y' = - PM'.$$

Итакъ, мы видимъ, что уравненіе (A_1) должно давать для y' при всякомъ x' два корня равныхъ по абсолютной величинѣ, но съ разными знаками, что не иначе возможно какъ тогда, когда уничтожается коэффиціентъ

$$2B_1x' + 2E_1$$

при первой степени y', что даетъ уравненіе

$$B_1x' + E_1 = 0.$$

Такъ какъ послѣднее уравненіе должно удовлетворяться при всевозможныхъ значеніяхъ для x', то должно быть

$$B_1 = 0 \quad \text{и} \quad E_1 = 0.$$

Итакъ, мы видимъ, что уравненіе (A_1) окончательно должно имѣть видъ

$$C_1y'^2 + 2D_1x' = 0,$$

откуда

$$y'^2 = -2\,\frac{D_1}{C_1}\,x',$$

или, обозначая $-\dfrac{D_1}{C_1}$ черезъ p, получимъ

$$y'^2 = 2px'.$$

Число $p = -\dfrac{D_1}{C_1}$ называется *параметромъ* параболы.

114. Итакъ, мы видимъ, что для опредѣленія параметра параболы нужно выбрать за оси координатъ ось параболы и касательную въ вершинѣ. Преобразованіе къ новымъ осямъ легко сдѣлать, ибо мы уже опредѣлили координаты вершины параболы, которая принимается за новое начало координатъ; что касается угла, составляемаго новою осью x-овъ съ прежнею, то этотъ уголъ есть нечто иное какъ уголъ составляемый осью параболы съ осью x-овъ.

115. Параметръ параболы можно опредѣлить проще на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Мы видѣли уже, что уравненіе параболы можетъ быть приведено къ виду

$$\alpha^2 + \beta = 0,$$

гдѣ $\alpha = 0$ есть нѣкоторый діаметръ, а $\beta = 0$ есть касательная къ параболѣ въ точкѣ сѣченія параболы діаметромъ $\alpha = 0$. Мы преобразовали первую часть уравненія параболы такимъ образомъ, что заключили букву x въ квадратъ α^2, такъ что линейная функція β этой буквы болѣе не содержала. Мы могли бы вести преобразованіе иначе: можно было бы въ первый квадратъ заключить букву y, тогда уравненіе параболы имѣло бы видъ

$$\alpha^2 + \beta = 0$$

съ тою лишь разницею, что функція β зависѣла бы отъ одного x. Въ этомъ случаѣ $\beta = 0$ была бы касательная къ параболѣ параллельная оси y-овъ, а $\alpha = 0$ соотвѣтственный діаметръ. Однимъ словомъ мы замѣчаемъ, что, какимъ бы образомъ мы ни преобразовали уравненіе параболы къ виду

$$\alpha^2 + \beta = 0,$$

всегда будетъ $\alpha = 0$ діаметръ параболы, а $\beta = 0$ соотвѣтственная касательная.

Для опредѣленія параметра возьмемъ ось параболы, уравненіе которой имѣетъ видъ

$$Ax + By + \lambda = 0.$$

Этой оси соотвѣтствуютъ перпендикулярныя хорды. Уравненіе касательной, параллельной этимъ хордамъ будетъ имѣть видъ

$$Bx - Ay + \mu = 0.$$

Отсюда мы заключаемъ, что уравненіе заданной параболы можетъ быть приведено къ виду

$$(Ax + By + \lambda)^2 = 2P\ (Bx - Ay + \mu) \qquad (*)$$

Остается опредѣлить λ, μ, P подъ тѣмъ условіемъ, чтобы это уравненіе совпадало съ заданнымъ уравненіемъ параболы

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Послѣднее уравненіе можно написать такъ

$$A^2x^2 + 2BAxy + B^2y^2 + 2DAx + 2EAy + AF = 0.$$

Раскрывая скобки въ уравненіи (*), мы получимъ

$$A^2x^2 + 2ABxy + B^2y^2 + 2\,(A\lambda - PB)\,x + 2\,(B\lambda + AP)\,y + \\ + \lambda^2 - 2P\mu = 0,$$

Откуда получаемъ для опредѣленія λ, μ, P три уравненія

$$A\lambda - PB = DA,\ B\lambda + AP = EA,\ \lambda^2 - 2P\mu = FA.$$

Изъ первыхъ двухъ уравненій получаемъ

$$\lambda = A\,.\,\frac{DA + BE}{A^2 + B^2},\ P = A\,\frac{EA - DB}{A^2 + B^2} = \frac{AM}{A^2 + B^2}$$

наконецъ

$$\mu = \frac{\lambda^2 - FA}{2P}.$$

Припоминая, что координаты ξ и η относительно новыхъ осей координатъ суть не что иное какъ разстоянія до касательной въ вершинѣ и до оси параболы, мы получимъ

$$\xi = \frac{Bx - Ay + \mu}{\sqrt{A^2 + B^2}};\ \eta = \frac{Ax + By + \lambda}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Подставляя въ уравненіе (*), получимъ

$$(A^2 + B^2).\ \eta^2 = 2P.\ \sqrt{A^2 + B^2}.\xi$$

Отсюда

$$\eta^2 = 2\,\frac{P}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,\xi.$$

Итакъ, мы получимъ окончательно выраженіе для параметра параболы въ такомъ видѣ

$$p = \frac{P}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

116. Пояснимъ изложенную теорію численнымъ примѣромъ. Возьмемъ уравненіе

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 1 = 0.$$

Это уравненіе, по разложеніи на сумму квадратовъ, обращается въ слѣдующее

$$(x + y - 1)^2 + 2y = 0$$

и, слѣдовательно, опредѣляетъ нѣкоторую параболу, ибо имѣетъ видъ

$$\alpha^2 + \beta = 0,$$

гдѣ $\alpha = x + y - 1$, а $\beta = 2y$.

Прежде всего замѣчаемъ, что на параболѣ лежитъ точка пересѣченія двухъ прямыхъ $\alpha = 0, \beta = 0$. Прямая $\beta = 0$ въ данномъ случаѣ совпадаетъ съ осью x-овъ, ибо $\beta = 2y$, такъ что уравненіе $\beta = 0$ обращается въ уравненіе оси OX $y = 0$ (см. черт. 42).

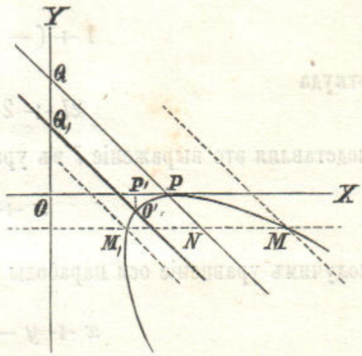
Прямая $\alpha = 0$ имѣетъ видъ

$$x + y = 1$$

и, слѣдовательно, пересѣкаетъ оси координатъ въ точкахъ P и Q, причемъ

$$OP = OQ = 1.$$

Точка P принадлежитъ параболѣ.



Черт. 42.

Уравненіе параболы

$$\alpha^2 + 2y = 0 \qquad (B)$$

показываетъ, что вся парабола лежитъ ниже оси OX, ибо для того, чтобы уравненіе (B) было возможно, необходимо, чтобы $2y = \beta$ было отрицательно; полагая на самомъ дѣлѣ $\beta = -k$ (гдѣ k положительное число), мы получимъ прямую параллельную оси x-овъ, которая пересѣчетъ параболу въ двухъ точкахъ M и M_1, изъ которыхъ одна получится какъ пересѣченіе прямой $\beta = -k$ съ діаметромъ $\alpha = +\sqrt{k}$, а другая, какъ пересѣченіе той же прямой $\beta = -k$ съ діаметромъ $\alpha = -\sqrt{k}$. Для нахожденія оси параболы пишемъ уравненіе любой хорды

$$l\alpha + m\beta + n = 0,$$

которое въ нашемъ частномъ случаѣ имѣетъ видъ

$$l\,(x + y - 1) + m\,(2y) + n = 0.$$

Уравненіе соотвѣтственнаго діаметра будетъ

$$\alpha = \frac{l}{2m}, \text{ т. е. } x + y - 1 = \frac{l}{2m}.$$

Остается для нахожденія оси подобрать l и m такъ, чтобы прямая

$$l\alpha + m\beta + n = 0,$$

имѣющая уравненіе

$$lx + (l + 2m)\,y - l + n = 0,$$

была перпендикулярна къ діаметру

$$x + y - 1 = \frac{l}{2m}.$$

Для этого необходимо, чтобы угловые коэффиціенты

$$-\frac{l}{l+2m} \text{ и } -1$$

удовлетворяли условію

$$1 + (-1).\left(-\frac{l}{l+2m}\right) = 0,$$

откуда

$$2l + 2m = 0, \quad l = -m$$

подставляя это выраженіе l въ уравненіе

$$x + y - 1 = \frac{l}{2m},$$

получимъ уравненіе оси параболы въ слѣдующемъ видѣ

$$x + y - 1 = -\frac{m}{2m} = -\frac{1}{2},$$

откуда, окончательно, получимъ уравненіе оси $P'Q'$ въ слѣдующемъ видѣ

$$x + y = \frac{1}{2}.$$

Координаты вершины получимъ, рѣшая относительно x и y систему уравненій

$$(x + y - 1)^2 + 2y = 0$$

$$x + y - 1 = -\frac{1}{2};$$

откуда

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2y = 0, \quad y = -\frac{1}{8},$$

подставляя полученное значеніе въ уравненіе

$$x + y - 1 = -\frac{1}{2},$$

получимъ для абсциссы вершины значеніе

$$x = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$$

Итакъ, координаты вершины параболы будутъ

$$x = +\frac{5}{8}, \quad y = -\frac{1}{8}.$$

Отнесемъ заданную параболу къ новымъ осямъ координатъ, причемъ возьмемъ за новую ось x-овъ ось параболы

$$x + y = \frac{1}{2},$$

за новое начало возьмемъ вершину параболы

$$\left(\frac{5}{8}, -\frac{1}{8}\right).$$

Придется употребить слѣдующія формулы преобразованія координатъ

$$x = a + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$

$$y = b + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

гдѣ
$$a = \frac{5}{8},\ b = -\frac{1}{8},\ \alpha = -45^\circ;$$

$$\cos\alpha = +\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда

$$x = \frac{5}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'),$$

$$y = -\frac{1}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y');$$

откуда

$$x + y - 1 = \sqrt{2}\ y' - \frac{1}{2}.$$

Уравненіе параболы

$$(x + y - 1)^2 + 2y = 0$$

можетъ быть написано такъ:

$$\left(\sqrt{2}\, y' - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left[-\frac{1}{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')\right] = 0,$$

или, раскрывая скобки и сокращая, получимъ

$$2y'^2 - \sqrt{2}\, x' = 0,$$

откуда, окончательно, получаемъ уравненіе параболы въ простѣйшемъ видѣ

$$y'^2 = 2\,\frac{\sqrt{2}}{4}\,x'.$$

Итакъ, мы видимъ, что параметръ параболы p равенъ $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Получимъ параметръ другимъ указаннымъ нами способомъ. Сравниваемъ уравненіе

$$(x + y + \lambda)^2 = 2P\,(x - y + \mu)$$

съ уравненіемъ заданнымъ

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 1 = 0,$$

тогда получимъ три уравненія

$$\lambda - P = -1,\ \ \lambda + P = 0,\ \ \lambda^2 - 2P\mu = 1,$$

откуда получаемъ

$$\lambda = -\frac{1}{2},\ P = \frac{1}{2},\ \mu = -\frac{3}{4}.$$

Параметръ

$$p = \frac{P}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2};$$

уравненіе оси

$$x + y - \frac{1}{2} = 0;$$

уравненіе касательной въ вершинѣ

$$x - y - \frac{3}{4} = 0.$$

117. Пріемъ, употребленный нами въ § 115 для полученія параметра параболы въ случаѣ прямоугольныхъ осей координатъ, можетъ быть примѣненъ и къ случаю осей косоугольныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, обозначая через θ уголъ между осями координатъ, опредѣлимъ λ, μ, P черезъ сравненіе уравненія

$$(Ax + By + \lambda)^2 = 2P.\ [(B - A\cos\theta)\,x - (A - B\cos\theta)\,y + \mu]$$

съ уравненіемъ заданнной параболы

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Получаемъ три уравненія

$$A\lambda - P\,(B - A\cos\theta) = AD$$
$$B\lambda + P\,(A - B\cos\theta) = AE$$
$$\lambda^2 - 2P\mu = AF,$$

откуда найдемъ три числа λ, μ, P.

Преобразованіе къ новымъ координатамъ совершится по формуламъ

$$\xi = \frac{[(B - A\cos\theta)\,x - (A - B\cos\theta)\,y + \mu]\sin\theta}{\sqrt{(B - A\cos\theta)^2 + (A - B\cos\theta)^2 + 2\,(B - A\cos\theta)\,(A - B\cos\theta)\cos\theta}} =$$

$$= \frac{(B - A\cos\theta)\,x - (A - B\cos\theta)\,y + \mu}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}},$$

$$\eta = \frac{(Ax + By + \lambda)\sin\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}},$$

откуда, окончательно, получаемъ уравненіе параболы въ такомъ видѣ

$$\frac{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\eta^2 = 2P\,\xi\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}\,,$$

или

$$\eta^2 = 2\,\frac{P\sin^2\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}\,\xi.$$

118. Если мы за ось x-овъ возьмемъ какой нибудь діаметръ, за новое начало точку, въ которой діаметръ пересѣкаетъ параболу, за новую же ось y-овъ прямую параллельную хордамъ дѣлящимся пополамъ діаметромъ взятымъ за ось x-овъ, то отъ такого преобразованія координатъ выйдетъ уравненіе параболы въ слѣдующемъ видѣ

$$y'^2 = 2p_1\,x',$$

въ чемъ легко убѣдиться на основаніи соображеній, подобныхъ изложеннымъ въ § 113. Вся разница будетъ состоять лишь въ томъ, что новыя оси координатъ косоугольныя и коэффиціентъ p_1 не равенъ параметру параболы.

119. На основаніи изложеннаго въ § 117 легко указать зависимость между p_1 и параметромъ p. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что задано уравненіе параболы

$$y^2 = 2p_1\,x,$$

отнесенное къ нѣкоторому діаметру и касательной, составляющимъ между собою уголъ θ. Придется съ этимъ уравненіемъ сравнивать слѣдующее

$$(y + \lambda)^2 = 2P\,(x + \cos\theta\,y + \mu);$$

получаемъ

$$P = p_1,$$

полагая

$$\eta = (y + \lambda)\sin\theta,\ \xi = x + \cos\theta\,y + \mu,$$

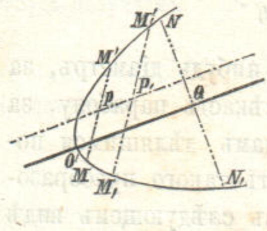
$$\eta^2 = 2p_1\sin^2\theta\,\xi,$$

откуда получаемъ искомую зависимость

$$p = p_1\sin^2\theta.$$

120. На основаніи всего изложеннаго мы замѣчаемъ слѣдующее геометрическое правило для построенія оси параболы, если задано очертаніе этой параболы. Беремъ двѣ произвольныя взаимно параллельныя хорды параболы MM' и $M_1M'_1$ и дѣлимъ эти хорды въ точкахъ p и p' пополамъ. Соединяя точки p и p', получимъ одинъ изъ діаметровъ параболы (см. черт. 43). Проводимъ произвольную

прямую перпендикулярную къ діаметру pp_1 и пересѣкающую параболу въ нѣкоторыхъ двухъ точкахъ N и N'. Хорду NN' дѣлимъ въ точкѣ Q попаламъ. Черезъ точку Q проводимъ прямую параллельную діаметру pp_1; эта послѣдняя прямая и будетъ осью симметріи параболы.



Черт. 43.

121. Изъ разсмотрѣнія уравненія параболы въ простѣйшемъ видѣ $y^2 = 2p\,x$, получаемаго, когда возьмемъ за ось x-овъ ось симметріи, и за ось y-овъ касательную въ вершинѣ, легко вывести слѣдующее весьма простое геометрическое правило для построенія параболы по точкамъ. Изъ уравненія параболы видно, что y есть среднее пропорціональное число между числами $2p$ и x. Отложимъ на оси OX отрѣзки OP и OA равныя нѣкоторой асциссѣ x и удвоенному параметру $2p$. На прямой AP какъ на діаметрѣ построимъ кругъ AQ_1P, который пересѣчетъ ось OY въ точкѣ Q_1. По извѣстной теоремѣ элементарной геометріи получимъ, что

$$OQ^2{}_1 = AO.\,OP,$$

откуда, принимая во вниманіе, что

$$AO = 2p \text{ и } OP = x$$

Черт. 44.

для точки M, замѣчаемъ, что

$$OQ^2{}_1 = 2p\,.\,x,$$

и, слѣдовательно, на основаніи уравненія параболы получимъ, что

$$OQ_1 = y.$$

И, слѣдовательно, точка M на параболѣ получится (см. черт. 44) какъ пересѣченіе двухъ прямыхъ PM и Q_1M, параллельныхъ осямъ координатъ. Другую точку M_1 на параболѣ получимъ, выбирая соотвѣтствующую ей абсциссу OP_1, тогда ординатою этой точки M_1 будетъ отрѣзокъ OQ_2, гдѣ Q_2 есть точка пересѣченія оси OY съ кругомъ AQ_2P_1, построеннымъ на длинѣ AP_1, какъ на діаметрѣ. Подобнымъ же образомъ получимъ изъ круга

AQ_3P_2 точку M_2, лежащую на искомой параболѣ. Итакъ, мы видимъ, что указанное построеніе даетъ возможность указать сколько угодно точекъ M, M_1, M_2, ... на искомой параболѣ. Каждой изъ точекъ M, M_1, M_2, ..., лежащихъ по одну сторону оси симметріи соотвѣтствуетъ нѣкоторая точка, симметрично лежащая по другую сторону, такъ что найдя точки M, M_1, M_2 и т. д., мы непосредственно получимъ рядъ точекъ N, N_1, N_2, и т. д., лежащихъ на параболѣ по другую сторону оси.

Касательная.

122. Мы видѣли уже, что точки пересѣченія хорды

$$l\alpha + m\beta + n = 0$$

съ параболою

$$\alpha^2 + \beta = 0$$

опредѣляются черезъ рѣшеніе системы уравненій

$$l\alpha + m\beta + n = 0, \quad \alpha^2 - \frac{l}{m}\alpha - \frac{n}{m} = 0,$$

или, что одно и тоже, изъ системы

$$l\alpha + m\beta + n = 0, \quad \alpha = \frac{l}{2m} \pm \sqrt{R_n},$$

гдѣ

$$R_n = \frac{l^2}{4m^2} + \frac{n}{m}.$$

Эти точки пересѣченія совпадаютъ, если $R_n = 0$, тогда хорда

$$l\alpha + m\beta + n = 0$$

обращается въ касательную.

Въ самомъ дѣлѣ

$$R_n = \frac{l^2 + 4nm}{4m^2} = 0,$$

откуда получаемъ

$$l^2 + 4nm = 0, \; n = -\frac{l^2}{4m}.$$

Итакъ, мы получаемъ общее уравненіе касательной къ параболѣ въ такомъ видѣ

$$l\alpha + m\beta - \frac{l^2}{4m} = 0.$$

Раздѣляя на m это уравненіе и обозначая $\frac{l}{2m} = u$, получимъ уравненіе касательной въ такомъ видѣ

$$2u\alpha + \beta - u^2 = 0. \qquad (*)$$

123. **Задача**. Черезъ точку, лежащую на параболѣ, провести къ параболѣ касательную.

Пусть координаты заданной точки M на параболѣ будутъ x_0, y_0; обозначимъ черезъ α_0, β_0 результатъ подстановки координатъ x_0, y_0 въ функціи α и β. Такъ какъ по предположенію точка M лежитъ на заданной параболѣ, то должно быть

$$\alpha^2_0 + \beta_0 = 0.$$

Остается опредѣлить въ уравненіи (*) § 122 коэффиціентъ u подъ тѣмъ условіемъ, чтобы касательная проходила черезъ точку M; для этой цѣли необходимо удовлетворить уравненію

$$2u\alpha_0 + \beta_0 - u^2 = 0.$$

Принимая въ соображеніе, что

$$\beta_0 = -\alpha^2_0,$$

получимъ

$$2u\alpha_0 - \alpha^2_0 - u^2 = 0,\ -(u - \alpha_0)^2 = 0,\ u - \alpha_0 = 0,\ u = \alpha_0.$$

Такимъ образомъ мы опредѣлили величину искомаго параметра u; остается полученное значеніе u подставить въ уравненіе (*), тогда мы получимъ, окончательно, уравненіе искомой касательной въ такомъ видѣ

$$2\alpha_0\alpha + \beta - \alpha^2_0 = 0,$$

или въ болѣе симметричномъ видѣ

$$2\alpha_0\alpha + \beta + \beta_0 = 0.$$

Если уравненіе параболы приведено къ простѣйшему виду

$$y^2 = 2px,$$

то

$$\alpha = y, \ \beta = -2px,$$

такъ что уравненіе касательной будетъ имѣть видъ

$$2yy_0 - 2px - 2px_0 = 0,$$

или

$$yy_0 = p\,(x + x_0).$$

124. **Задача**. Черезъ точку, лежащую внѣ параболы, провести къ параболѣ касательную.

Пусть координаты, заданной точки M суть x_1, y_1, обозначимъ черезъ α_1 и β_1 результатъ подстановки координатъ x_1 и y_1 въ функціи α и β. Обозначая черезъ x_0 и y_0 координаты точки касанія искомой касательной, мы получимъ для этой касательной уравненіе

$$2\alpha\alpha_0 + \beta + \beta_0 = 0. \tag{1}$$

Чтобы эта касательная проходила черезъ точку M, необходимо, чтобы удовлетворялось условіе

$$2\alpha_0\alpha_1 + \beta_0 + \beta_1 = 0, \tag{2}$$

причемъ, очевидно, должно быть

$$\alpha^2_0 + \beta_0 = 0, \tag{3}$$

ибо точка $(x_0\ y_0)$ лежитъ на параболѣ. Рѣшая уравненія (2) и (3) относительно α_0 и β_0, мы для нихъ получимъ двѣ системы рѣшеній, подставляя которыя въ уравненіе (1) мы получимъ двѣ касательныя проходящія черезъ точку M. Производя указанное рѣшеніе, мы получаемъ.

$$\alpha_0 = \alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1{}^2 + \beta_1}, \quad \beta_0 = -\alpha_0{}^2.$$

Послѣднія формулы показываютъ, что существуютъ двѣ дѣйствительныя касательныя, когда

$$\alpha^2_1 + \beta_1 > 0,$$

то есть когда точка M лежитъ съ той стороны параболы, куда кривая обращена выпуклостью и, наоборотъ, касательныхъ нѣтъ, если

$$\alpha_1{}^2 + \beta_1 < 0;$$

если же

$$\alpha_1^{\,2} + \beta_1 = 0,$$

тогда

$$\alpha_0 = \alpha_1, \quad \beta_0 = \beta_1$$

и касательная будетъ одна

$$2\alpha\alpha_1 + \beta + \beta_1 = 0,$$

что мы видѣли уже въ предыдущемъ параграфѣ.

125. Мы опредѣляли координаты точки касанія, или что одно и то же, значенія функцій α_0 и β_0 изъ уравненій

$$2\alpha\alpha_1 + \beta + \beta_1 = 0, \quad \alpha^2 + \beta = 0,$$

что приводится къ опредѣленію точекъ пересѣченія параболы

$$\alpha^2 + \beta = 0$$

съ прямою

$$2\alpha\alpha_1 + \beta + \beta_1 = 0.$$

Послѣдняя прямая, какъ показываетъ ея уравненіе, дѣйствительная для всякаго положенія точки M называется *полярою* этой точки, точка же M по отношенію къ полярѣ называется *полюсомъ*.

Примѣръ.

Провести къ параболѣ

$$(x = y)^2 + 3x - 1 = 0$$

касательную черезъ точку $(x_1 = 1,\ y_1 = 0)$;

$$\alpha_1 = 1 - 0 = 1, \quad \beta_1 = 3 - 1 = 2$$

$$\alpha_0 = 1 \pm \sqrt{3}; \quad \beta_0 = -4 \mp 2\sqrt{3} = -\alpha_0^{\,2},$$

откуда, окончательно, уравненія касательныхъ будутъ

$$2(x - y)(1 + \sqrt{3}) + 3x - 5 - 2\sqrt{3} = 0,$$

$$2(x - y)(1 - \sqrt{3}) + 3x - 5 + 2\sqrt{3} = 0.$$

126. Легко замѣтить, что уравненія касательныхъ будутъ

$$2\alpha\,\alpha_1 + \beta - 2\alpha_1^{\,2} - \beta_1 + 2(\alpha - \alpha_1)\sqrt{\alpha_1^{\,2} + \beta_1} = 0,$$

$$2\alpha\,\alpha_1 + \beta - 2\alpha_1^{\,2} - \beta_1 - 2(\alpha - \alpha_1)\sqrt{\alpha_1^{\,2} + \beta_1} = 0,$$

перемножая первыя части, мы получимъ уравненіе, опредѣляющее совокупность двухъ касательныхъ, проведенныхъ черезъ точку M, въ такомъ видѣ

$$(2\alpha\alpha_1 + \beta - 2\alpha_1^2 - \beta_1)^2 - 4(\alpha - \alpha_1)^2(\alpha_1^2 + \beta_1) = 0,$$

откуда окончательно

$$4.(\alpha^2 + \beta).(\alpha_1^2 + \beta_1) - (2\alpha\alpha_1 + \beta + \beta_1)^2 = 0.$$

127. **Задача**. Провести касательную къ параболѣ параллельно заданной прямой.

Уравненіе заданной прямой можно представить въ видѣ

$$l\alpha + m\beta + n = 0.$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ касательной

$$2\alpha\alpha_0 + \beta + \beta_0 = 0,$$

мы замѣчаемъ, что

$$2\alpha_0 = \frac{l}{m},$$

или

$$\alpha_0 = \frac{l}{2m}, \quad \beta_0 = -\alpha_0^2 = -\frac{l^2}{4m^2};$$

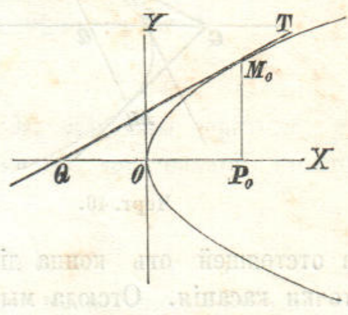
получаемъ окончательно уравненіе касательной въ такомъ видѣ

$$\frac{l}{m}\alpha + \beta - \frac{l^2}{4m^2} = 0.$$

128. Возьмемъ уравненіе параболы, отнесенное къ оси симметріи и касательной въ вершинѣ.

Пусть уравненіе заданной параболы будетъ

$$y^2 = 2px.$$



Черт. 45.

Тогда, обозначая черезъ x_0, y_0 координаты точки касанія M_0, мы напишемъ уравненіе касательной въ такомъ видѣ

(1) $$yy_0 = p(x + x_0).$$

Опредѣлимъ точку Q (см. черт. 45), въ которой касательная пересѣкаетъ ось x-овъ. Для этого надо въ уравненіи (1) положить $y = 0$, тогда для x, т. е. абсциссы точки Q, получимъ значеніе

$$x = -x_0,$$

что даетъ простой способъ построенія касательной въ точкѣ на параболѣ по равенству $\overline{OQ} = \overline{OP}_0$.

129. Весьма важно замѣтить, что уравненіе касательной сохраняетъ свой видъ

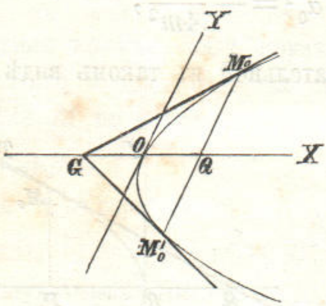
$$yy_0 = p\,(x + x_0)$$

и въ томъ случаѣ, когда парабола опредѣляемая уравненіемъ

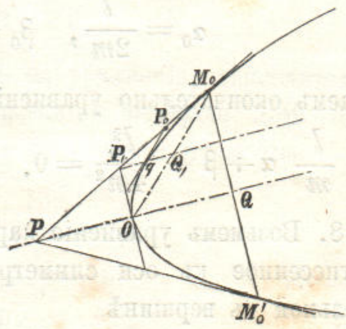
$$y^2 = 2px$$

отнесена къ одному изъ діаметровъ и къ соотвѣтственной касательной. Справедливость сказаннаго явствуетъ изъ того, что во всѣхъ нашихъ общихъ заключеніяхъ о касательныхъ параболы, приведенныхъ въ предыдущихъ параграфахъ, мы оси координатъ можемъ считать совершенно произвольными.

Отсюда слѣдуетъ, что касательная пересѣкаетъ діаметръ, принятый за ось x-овъ въ точкѣ G, лежащей внѣ параболы (см. черт. 46)



Черт. 46.



Черт. 47.

и отстоящей отъ конца діаметра O на разстояніе равное абсциссѣ точки касанія. Отсюда мы выводимъ слѣдующее: такъ какъ концы хорды $M_0\,QM'_0$, дѣлящейся пополамъ діаметромъ, принятымъ за ось x-овъ, имѣютъ абсциссу OQ, то касательныя, проведенныя къ параболѣ въ этихъ концахъ пересѣкаютъ діаметръ, принятый за ось x-овъ въ одной общей точкѣ G.

Изъ послѣдняго замѣчанія вытекаетъ какъ слѣдствіе простой способъ построенія по двумъ заданнымъ касательнымъ параболы любого числа другихъ касательныхъ. Пусть будутъ заданы двѣ касательныя параболы PM_0 и PM'_0, причемъ M_0 и M'_0 суть точки касанія (см. черт. 47). Соединяемъ точки M_0 и M'_0 прямою и дѣлимъ отрѣзокъ $M_0 M'_0$ точкою Q пополамъ. Соединяемъ точку Q съ вершиною угла P, образуемаго касательными и дѣлимъ пополамъ точкою O отрѣзокъ PQ. Точка O лежитъ на параболѣ, причемъ касательная къ параболѣ въ этой точкѣ O будетъ прямая OP_1, параллельная прямой $M_0 M'_0$. Пусть касательная OP_1 пересѣкаетъ заданную касательную PM_0 въ точкѣ P_1, тогда можемъ повторить предыдущее построеніе уже относительно касательныхъ $P_1 M_0$ и $P_1 O$, причемъ точки касанія будутъ M_0 и O. Дѣлимъ отрѣзокъ $\overline{M_0 O}$ точкою Q_1 пополамъ. Соединяемъ точку Q_1 съ вершиною P_1, чрезъ средину q отрѣзка $P_1 Q_1$ проводимъ прямую qP_2 параллельно OM_0, получаемъ въ послѣдней прямой новую касательную къ параболѣ qP_2, причемъ точка касанія будетъ q. Подобнымъ построеніемъ можемъ получить сколько угодно новыхъ касательныхъ параболы. Замѣтимъ кстати, что прямыя PQ, $P_1 Q_1$, и т. д. должны быть параллельны между собою, ибо онѣ суть не что иное, какъ діаметры параболы.

Нормаль.

130. Прямая, проведенная черезъ точку на параболѣ перпендикулярно къ касательной этой точки, называется ***нормалью***.

Возьмемъ уравненіе параболы въ простѣйшемъ видѣ

$$y^2 = 2px.$$

Обозначая координаты нѣкоторой точки M_0 параболы черезъ x_0, y_0, мы получимъ, какъ уже видѣли, уравненіе касательной въ этой точкѣ въ слѣдующемъ видѣ

$$y y_0 = p(x + x_0);$$

очевидно, что уравненіе перпендикуляра, проведеннаго къ этой касательной черезъ точку (x_0, y_0) будетъ имѣть видъ

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0). \qquad (*)$$

Это послѣднее уравненіе и есть уравненіе нормали.

Разстояніе между точкою N, въ которой нормаль (*) пересѣкаетъ ось x-овъ, и точкою P, въ которой ту-же ось пересѣкаетъ перпендикуляръ опущенный изъ точки M_0 на эту ось, называется ***поднормалью*** параболы.

Легко показать, что поднормаль параболы есть величина постоянная для всѣхъ точекъ параболы и равная p, параметру параболы.

Абсциса точки P есть не что иное, какъ x_0, абсцису же точки N назовемъ x_n и получимъ ее, подставляя въ уравненіе нормали (*) $y=0$, тогда будетъ:

$$y_0 = \frac{y_0}{p}(x_n - x_0),$$

величина искомой поднормали есть не что иное, какъ $x_n - x_0$, и, на основаніи предыдущаго уравненія, очевидно, равна p.

Задачи.

1. Какія геометрическія мѣста опредѣляютъ уравненія

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 6x - 12y + 9 = 0$$
$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$$
$$4x^2 + 12xy + 9y^2 - 20x - 30y + 21 = 0$$
$$2x - 8xy + 8y^2 - 7x + 1 = 0$$

Отв. Прямая, ничего, двѣ параллельныя прямыя, парабола.

2. Какія геометрическія мѣста опредѣляютъ при разныхъ знакахъ уравненія

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{2x}{a} \pm \frac{2y}{b} + 1 = 0.$$

3. Разсмотрѣть параболу

$$x^2 - 6xy + 9y^2 + 2x - 7y + 1 = 0.$$

Отв. Ось $x - 3y + \frac{23}{20} = 0$, координаты вершины $\left(-\frac{433}{400}, \frac{9}{400}\right)$, уравненіе параболы въ простѣйшемъ видѣ $y^2 = 2\frac{\sqrt{10}}{200}x$.

4. Разсмотрѣть параболу

$$y^2 - 2x + y - 1 = 0.$$

Отв. $\alpha = y$, $\beta = -2x + y - 1$, откуда діаметръ $y = \frac{l}{2m}$ соотвѣтствуетъ хордамъ $ly + m(-2x + y - 1) = 0$, или, что одно и то-же, хордамъ $-2mx + (l + m)y - m = 0$; для перпендукулярности необходимо положить $l + m = 0$ (оси координатъ мы предполагаемъ прямоугольными), откуда $m = -l$ и ось параболы будетъ $y = -\frac{1}{2}$ координаты вершины суть $\left(-\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}\right)$. Уравненіе параболы въ простѣйшемъ видѣ будетъ $y^2 = 2x$.

5. Разсмотрѣть параболу

$$3x^2 - 2x + 3y - 2 = 0.$$

Отв. Умножая на 3, мы получимъ $\alpha = 3x$, $\beta = -6x + 9y - 6$, хорды и діаметръ имѣютъ уравненіе $3x = \frac{l}{2m}$, $3lx + m(-6x + 9y - 6) = 0$, условіе перпендикулярности $l - 2m = 0$, откуда уравненіе оси $x = \frac{1}{3}$, координаты вершины $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{9}\right)$, уравненіе въ простѣйшемъ видѣ $y^2 = x$.

6. Разсмотрѣть уравненія параболъ

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 + 2x - y + 7 = 0$$

$$x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2 - x = 0.$$

Отв. Уравненія въ простѣйшемъ видѣ будутъ

$$y^2 = \frac{8\sqrt{13}}{169}x, \quad y^2 = \frac{4\sqrt{5}}{5}x.$$

7. Изъ начала координатъ провести касательныя ко всѣмъ параболамъ, упомянутымъ въ задачахъ 3, 4, 5, 6.

Отв. Поляры этихъ параболъ относительно начала суть

$$2x - 7y + 2 = 0,\ 2x - y + 2 = 0,\ 2x - 3y + 4 = 0,$$
$$2x - y + 14 = 0,\ x = 0.$$

8. Провести черезъ точку (1, 1) касательныя къ параболѣ

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 3y - 1 = 0.$$

Отв. Поляра точки (1, 1) есть $2x + 7y - 1 = 0$.

9. Провести къ параболѣ $2x^2 - 6xy + \frac{9}{2}y^2 - 7x + y - \frac{1}{2} = 0$ касательную параллельно прямой $2x - y = 0$.

Отв. $2x - y + \frac{41}{152} = 0$.

Изслѣдованіе уравненія (A) въ случаѣ $AC - B^2 \gtrless 0$.

131. Обращаемся теперь къ изученію вида и главнѣйшихъ свойствъ линій второго порядка второго рода, т. е., когда уравненіе (A) разложеніемъ на сумму квадратовъ можетъ быть приведено къ виду

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0, \qquad (C)$$

гдѣ

$$\alpha = Ax + By + D,\ \beta = Ly + M,\ P = LN - M^2,$$

а

$$L = AC - B^2,\ M = AE - BD,\ N = AF - D^2.$$

132. Остановимся сначала на случаѣ

$$L = AC - B^2 > 0,$$

тогда уравненіе можетъ быть приведено къ виду

$$\beta^2_1 + \beta^2 + P = 0,$$

гдѣ

$$\beta_1 = \alpha\sqrt{L}.$$

Этотъ случай разбивается, въ свою очередь, на три частныхъ.

a) Если $P > 0$, то уравненіе

$$\beta^2_1 + \beta^2 + P = 0$$

не можетъ быть удовлетворено никакими вещественными значеніями координатъ x и y, ибо первая часть уравненія $\beta^2_1 + \beta^2 + P$ не можетъ быть сдѣлана меньше P и, слѣдовательно, никакимъ образомъ не можетъ равняться нулю. Итакъ, въ случаѣ $P > 0$ заданное уравненіе не опредѣляетъ никакого геометрическаго мѣста.

b) Случай $P = 0$ даетъ одну точку, лежащую на пересѣченіи двухъ прямыхъ $\beta_1 = 0$ и $\beta = 0$, ибо уравненіе $\beta^2_1 + \beta^2 = 0$ не можетъ иначе удовлетворяться, какъ если обѣ линейныя функціи β и β_1 заразъ обращаются въ нуль.

c) Обращаемся къ третьему наиболѣе интересному случаю $P < 0$. Въ этомъ случаѣ получается особая кривая линія, называемая *эллипсомъ*, къ изученію вида и свойствъ которой мы теперь и переходимъ.

Примѣры.

a) $$x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 4y + 2 = 0.$$

Послѣ разложенія на сумму квадратовъ получимъ

$$2\,(x + y + 1)^2 + (2y + 1)^2 + 1 = 0.$$

Уравненіе не опредѣляетъ никакого геометрическаго мѣста.

b) $$x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0.$$

Послѣ разложенія на сумму квадратовъ получимъ $(x - 1)^2 + y^2 = 0$.

Уравненіе опредѣляетъ точку $(x=1, y=0)$.

c) $$x^2+2xy+3y^2+2x+4y=0.$$

Послѣ разложенія на сумму квадратовъ получимъ

$$2(x+y+1)^2+(2y+1)^2-1=0.$$

Эллипсъ.

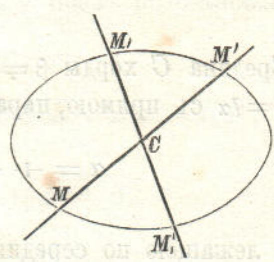
133. Итакъ, мы будемъ заниматься случаемъ, когда $L>0$ и $P<0$. Въ этомъ случаѣ можно будетъ положить $L=+\lambda^2$, а $P=-p^2$, такъ что уравненіе эллипса приметъ видъ

$$\lambda^2\alpha^2+\beta^2=p^2 \qquad (C')$$

Центръ.

134. Разсмотримъ точку, лежащую на пересѣченіи двухъ прямыхъ $\alpha=0$, $\beta=0$. Эта точка называется *центромъ* эллипса и имѣетъ то свойство, что точки кривой линіи относительно этого центра попарно симметричны. Другими словами, какъ бы мы ни провели черезъ этотъ центръ C хорду $\overline{MM'}$ (см. черт. 48), эта хорда MM' дѣлится центромъ пополамъ. То-же самое будетъ справедливо относительно всякой другой хорды $\overline{M_1M'_1}$, т. е. $\overline{M_1C}=\overline{M'_1C}$. Для того чтобы доказать предложенное свойство центра, проведемъ черезъ него нѣкоторую хорду. Уравненіе хорды, проходящей черезъ точку пересѣченія прямыхъ $\alpha=0$ и $\beta=0$, можетъ быть написано такъ:

$$\beta=l\alpha, \qquad (*)$$



Черт. 48.

гдѣ l — нѣкоторое произвольно заданное число. Мѣняя l, будемъ получать различныя хорды, проходящія черезъ центръ C. Координаты точки пересѣченія хорды (*) съ эллипсомъ (C') получатся черезъ рѣшеніе, относительно x и y, системы уравненій

$$\beta=l\alpha,\ \lambda^2\alpha^2+\beta^2=p^2.$$

Преобразуя послѣднюю систему, получимъ

$$\beta = l\alpha,\ \lambda^2\alpha^2 + l^2\alpha^2 = p^2,$$

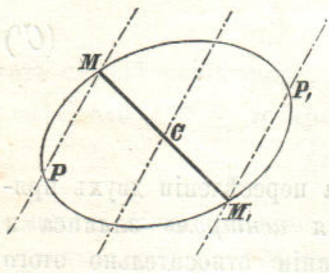
или еще такъ

$$\beta = l\alpha,\ (\lambda^2 + l^2)\,\alpha^2 = p^2,$$

или, наконецъ,

$$\beta = l\alpha,\ \alpha = \pm \frac{p}{\sqrt{\lambda^2 + l^2}}.$$

Послѣдняя система разбивается на двѣ системы, изъ которыхъ первая



Черт. 49.

$$\beta = l\alpha,\ \alpha = + \frac{p}{\sqrt{\lambda^2 + l^2}}$$

опредѣляетъ одинъ конецъ хорды M, какъ пересѣченіе хорды $\beta = l\alpha$ съ прямою

$$\alpha = + \frac{p}{\sqrt{\lambda^2 + l^2}} \text{ (см. черт. 49).}$$

Другая система

$$\beta = l\alpha,\ \alpha = - \frac{p}{\sqrt{\lambda^2 + l^2}}$$

опредѣляетъ другой конецъ хорды M', какъ пересѣченіе прямой $\beta = l\alpha$ съ прямою

$$\alpha = - \frac{p}{\sqrt{\lambda^2 + l^2}}.$$

Средина C хорды $\beta = l\alpha$ будетъ опредѣляться пересѣченіемъ хорды $\beta = l\alpha$ съ прямою, параллельною двумъ слѣдующимъ

$$\alpha = + \frac{p}{\sqrt{\lambda^2 + l^2}},\ \alpha = - \frac{p}{\sqrt{\lambda^2 + l^2}} \qquad (^{**})$$

и лежащею по срединѣ между ними. Эта прямая, лежащая по срединѣ между прямыми (**) MP и M_1P_1, имѣетъ, очевидно, уравненіе $\alpha = 0$, а потому средина хорды MM' лежитъ во первыхъ, на самой хордѣ $\beta = l\alpha$, да еще, кромѣ того, на прямой $\alpha = 0$ и, слѣдовательно, эта середина хорды опредѣляется системою

$$\beta = l\alpha,\ \alpha = 0,$$

или, что одно и то-же, системою

$$\beta = 0,\ \alpha = 0.$$

Другими словами, центръ

$$(\beta = 0,\ \alpha = 0)$$

дѣлитъ пополамъ всякую хорду $\beta = l\alpha$, проведенную черезъ него.

135. Посмотримъ, во что обратится заданное уравненіе эллипса (A), если взята новая система координатъ, причемъ направленіе осей не мѣняется, начало же координатъ переносится въ центръ эллипса. Назовемъ координаты центра черезъ a и b. Эти координаты должны удовлетворять двумъ уравненіямъ

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,$$

т. е. должно быть

$$Aa + Bb + D = 0,\ Lb + M = 0,$$

откуда

$$b = -\frac{M}{L},\ a = \frac{BM - DL}{AL}.$$

Формулы преобразованія будутъ

$$x = a + x',\quad y = b + y'.$$

Эти выраженія старыхъ координатъ черезъ новыя подставимъ въ уравненіе (C)

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0.$$

Посмотримъ, во что обратятся функціи α и β послѣ подстановки

$$x = a + x',\ y = b + y',$$

$$\alpha = A(a + x') + B(b + y') + D = Aa + Bb + D + Ax' + By',$$

отсюда видимъ, что

$$\alpha = Ax' + By',\ \text{ибо}\ Aa + Bb + D = 0.$$

Подобнымъ же образомъ

$$\beta = Ly + M = L(b + y') + M = Lb + M + Ly' = Ly',$$

отсюда уравненіе (C) принимаетъ видъ

$$L(Ax' + By')^2 + L^2y'^2 + P = 0 \tag{C'}$$

Для насъ гораздо важнѣе указать, во что обратится не первая часть уравненія (C) послѣ подстановки, а первая часть заданнаго уравненія (A). Для этой цѣли мы замѣчаемъ, что первая часть уравненія (C) отличается отъ таковой уравненія (A) только множителемъ AL, ибо во время разложенія первой части на сумму квадратовъ мы для удобства умножили обѣ части уравненія сначала на A, а потомъ на L, поэтому, когда мы желаемъ отъ разсмотрѣнія уравненія (C) перейти къ уравненію (A), необходимо раздѣлить уравненіе на AL. Раздѣляя уравненіе (C') на AL, получимъ то уравненіе, въ которое обратится заданное уравненіе эллипса отъ перенесенія начала координатъ въ центръ. Это искомое уравненіе будетъ

$$\frac{(Ax'+By')^2}{A}+\frac{Ly'^2}{A}+\frac{P}{A.L}=0,$$

$$\frac{A^2x'^2+2ABx'y'+B^2y'^2}{A}+\frac{(AC-B^2)y'^2}{A}+\frac{P}{AL}=0,$$

откуда окончательно

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+\frac{P}{AL}=0 \qquad (A')$$

Итакъ, мы видимъ, что отъ перенесенія новаго начала координатъ въ центръ эллипса три коэффиціента A, B, C при членахъ втораго измѣренія не мѣняются, коэффиціенты D и E пропадаютъ, а новый постоянный членъ, вмѣсто стараго F, обращается въ $\frac{P}{AL}$.

136. На основаніи параграфа 92 мы замѣчаемъ, что число $\frac{P}{AL}$ есть не что иное, какъ результатъ подстановки координатъ центра въ первую часть уравненія.

Примѣръ.

$$3x^2-4xy+2y^2-x-1=0;$$

$A=3$; умножаемъ уравненіе на 3:

$$(3x)^2-2(3x)\left\{2y+\frac{1}{2}\right\}+6y^2-3=0;$$

выдѣляя первый квадратъ, получимъ

$$\left(3x-2y-\frac{1}{2}\right)^2+2y^2-2y-\frac{13}{4}=0.$$

$L=2$; умножаемъ уравненіе на 2, получимъ

$$2\left(3x-2y-\frac{1}{2}\right)^2+(2y-1)^2-\frac{15}{2}=0,$$

отсюда видимъ, что

$$P=-\frac{15}{2}.$$

Центръ опредѣлится двумя уравненіями

$$3x-2y-\frac{1}{2}=0,\quad 2y-1=0;$$

откуда видимъ, что координаты центра будутъ

$$x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{1}{2}.$$

Перенося начало координатъ въ центръ, получимъ уравненіе

$$3x'^2-4x'y'+2y'^2-\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{3.2}=0,$$

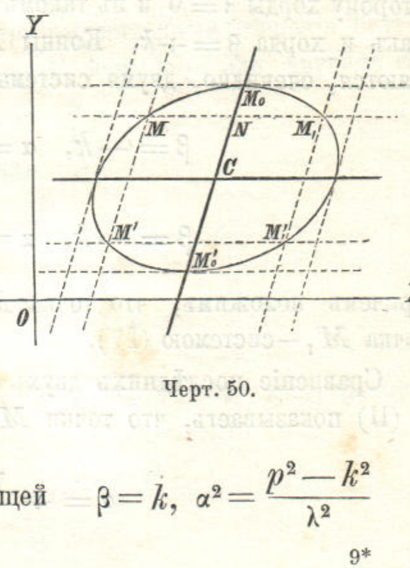
или

$$3x'^2-4x'y'+2y'^2-\frac{5}{4}=0.$$

Діаметры эллипса.

137. Разсмотримъ сначала хорды, параллельныя направленію $\beta=0$. Общее уравненіе этихъ хордъ есть $\beta=k$. Всѣ хорды $\beta=k$ параллельны оси OX, ибо $\beta=Ly+M$; такъ что уравненіе $\beta=k$ обращается въ слѣдующее

$$y=\frac{k-M}{L}.$$



Черт. 50.

Точки M и M_1 (см. черт. 50), въ которыхъ хорда $\beta=k$ пересѣкаетъ заданный эллипсъ, получатся изъ системы уравненій

$$\{\beta=k,\ \lambda^2\alpha^2+\beta^2=p^2\}.$$

Эта система равносильна слѣдующей $\beta=k,\ \alpha^2=\dfrac{p^2-k^2}{\lambda^2}$

и распадается на двѣ слѣдующихъ

$$(\mathrm{I})\ \beta=k,\ \alpha=+\frac{\sqrt{p^2-k^2}}{\lambda},\ (\mathrm{II})\ \beta=k,\ \alpha=-\frac{\sqrt{p^2-k^2}}{\lambda}$$

изъ которыхъ первая (I) опредѣляетъ конецъ хорды M, а вторая (II) другой конецъ M_1. Точки пересѣченія M и M_1 существуютъ только тогда, когда $k^2<p^2$, другими словами, когда абсолютная величина $k<p$.

Давая коэффиціенту k значенія $+p$ и $-p$, получимъ двѣ прямыя

$$\beta=+p \text{ и } \ =-p,$$

между которыми заключается эллипсъ.

Средина N хордъ $\overline{MM}_1$ можетъ быть опредѣлена изъ пересѣченія хорды $\overline{MM'}$, имѣющей уравненіе $\beta=k$, съ прямою $\alpha=0$, лежащей по срединѣ между двумя прямыми

$$\alpha=+\frac{\sqrt{p^2-k^2}}{\lambda},\ \alpha=-\frac{\sqrt{p^2-k^2}}{\lambda},$$

опредѣляющими точки M и M_1. Итакъ, мы видимъ, что средина любой хорды $\beta=k$, параллельной хордѣ $\beta=0$, лежитъ на прямой $\alpha=0$, которая называется *діаметромъ* эллипса.

138. Разсмотримъ теперь хорду $\beta=-k$, лежащую по другую сторону хорды $\beta=0$ и въ такомъ же разстояніи отъ послѣдней хорды, какъ и хорда $\beta=+k$. Концы M' и M'_1 хорды $\beta=-k$ опредѣляются, очевидно, двумя системами

$$\beta=-k,\ \ \alpha=+\frac{\sqrt{p^2-k^2}}{\lambda}, \tag{III}$$

$$\beta=-k,\ \ \alpha=-\frac{\sqrt{p^2-k^2}}{\lambda}, \tag{IV}$$

причемъ положимъ, что точка M' опредѣляется системою (III), а точка M'_1 —системою (IV).

Сравненіе послѣднихъ двухъ системъ (III) и (IV) съ системою (I) и (II) показываетъ, что точки M и M' лежатъ на прямой

$$\alpha=+\frac{\sqrt{p^2-k^2}}{\lambda},$$

и точки M_1 и M'_1 — на прямой

$$\alpha = -\frac{\sqrt{p^2 - k^2}}{\lambda}.$$

Итакъ, если теперь мы разсмотримъ хорду

$$\alpha = +\frac{\sqrt{p^2 - k^2}}{\lambda},$$

имѣющую концами точки M и M', то мы замѣтимъ, что концы эти опредѣляются пересѣченіемъ съ указанной хордой двухъ прямыхъ

$$\beta = +k, \ \beta = -k,$$

отсюда уже легко замѣтить, что середина N_1 указанной хорды $\overline{MM'}$ лежитъ на прямой $\beta = 0$.

Прямая $\beta = 0$ есть діаметръ, дѣлящій хорды, параллельныя прямой $\alpha = 0$, пополамъ.

Для того чтобы прямая $\alpha = l$, параллельная прямой $\alpha = 0$, пересѣкала эллипсъ, необходимо, чтобы система уравненій

$$\alpha = l, \ \lambda^2\alpha^2 + \beta^2 = p^2$$

допускала вещественныя рѣшенія относительно α и β. Преобразовывая систему, получимъ

$$\alpha = l, \ \beta^2 = p^2 - \lambda^2 l^2, \ \text{или} \ \alpha = l, \ \beta = \pm\sqrt{p^2 - \lambda^2 l^2}.$$

Послѣдняя система показываетъ, что вещественныя рѣшенія будутъ, когда λl будетъ, по численной величинѣ, меньше p, или, другими словами, когда численная величина $l < \frac{p}{\lambda}$.

Разсматривая предѣльный случай

$$l = \pm\frac{p}{\lambda},$$

получимъ систему

$$\alpha = \pm\frac{p}{\lambda}, \ \beta = 0,$$

опредѣляющую двѣ крайнія точки діаметра $\beta = 0$. Если въ этихъ точкахъ проведемъ прямыя

$$\alpha = +\frac{p}{\lambda}, \ \alpha = -\frac{p}{\lambda},$$

параллельныя діаметру $\alpha=0$, то эти прямыя будутъ касаться къ эллипсу въ концахъ діаметра $\beta=0$ и весь эллипсъ будетъ заключаться между ними. Сопоставляя полученное теперь со сказаннымъ раньше, получимъ, что эллипсъ есть конечныхъ размѣровъ сомкнутая кривая, заключающаяся въ параллелограммѣ образуемомъ четырьмя прямыми:

$$\beta=+p, \quad \beta=-p,$$

$$\alpha=+\frac{p}{\lambda}, \quad \alpha=-\frac{p}{\lambda},$$

изъ которыхъ двѣ первыя параллельны оси x-овъ.

139. Итакъ, изъ всего приведеннаго относительно двухъ діаметровъ эллипса $\alpha=0$, $\beta=0$ мы можемъ сказать, что діаметръ $\alpha=0$ дѣлитъ пополамъ всѣ хорды, параллельныя другому діаметру $\beta=0$, и, наоборотъ, діаметръ $\beta=0$ дѣлитъ всѣ хорды, параллельныя діаметру $\alpha=0$. Два діаметра, обладающіе указаннымъ свойствомъ, называются *сопряженными* діаметрами эллипса. Кромѣ того мы видимъ, что оба діаметра $\alpha=0$, $\beta=0$ проходятъ черезъ центръ, ибо центръ есть точка пересѣченія этихъ двухъ діаметровъ.

140. Покажемъ же теперь, что вообще параллельныя хорды любого направленія дѣлятся пополамъ нѣкоторою прямою, проходящею черезъ центръ и называемою діаметромъ. Возьмемъ хорды нѣкотораго направленія

$$l\alpha+m\beta+n=0.$$

Если, задавъ коэффиціентамъ l и m нѣкоторыя значенія, будемъ мѣнять коэффиціентъ n, то будемъ получать рядъ параллельныхъ хордъ. Выбирая нѣкоторое значеніе n, получимъ нѣкоторую хорду $\overline{MM'}$ изъ числа этихъ параллельныхъ хордъ. Координаты концовъ хорды $\overline{MM'}$ опредѣлятся черезъ рѣшеніе относительно x и y системы уравненій

$$\left.\begin{aligned} l\alpha+m\beta+n=0 \\ \lambda^2\alpha^2+\beta^2=p \end{aligned}\right\}.$$

Эта система можетъ быть преобразована слѣдующимъ образомъ: первое уравненіе оставимъ безъ перемѣны, изъ второго же исключимъ функцію β при помощи уравненія перваго:

$$\left.\begin{aligned} l\alpha+m\beta+n=0 \\ \lambda^2\alpha^2+\left(\frac{l}{m}\alpha+\frac{n}{m}\right)^2=p^2 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Второе уравненіе изъ числа послѣднихъ можно преобразовать такъ:

$$\alpha^2\left(\lambda^2+\frac{l^2}{m^2}\right)+2\,\frac{ln}{m^2}\,\alpha+\frac{n^2}{m^2}=p^2,$$

умножая на m^2, получимъ

$$\alpha^2(m^2\lambda^2+l^2)+2ln\alpha=p^2m^2-n^2.$$

Черезъ рѣшеніе послѣдняго уравненія относительно α получимъ

$$\alpha=-\frac{ln}{m^2\lambda^2+l^2}\pm R_n,\quad \text{гдѣ } R_n=\frac{m\sqrt{(p^2m^2-n^2)\lambda^2+p^2l^2}}{m^2\lambda^2+l^2},$$

причемъ R_n есть нѣкоторая функція отъ n.

Итакъ, мы видимъ, что предложенная система (*) распадается на двѣ слѣдующихъ:

$$l\alpha+m\beta+n=0,\quad \alpha=-\frac{ln}{m^2\lambda^2+l^2}+R_n \qquad \text{(I)}$$

$$l\alpha+m\beta+n=0,\quad \alpha=-\frac{ln}{m^2\lambda^2+l^2}-R_n; \qquad \text{(II)}$$

изъ которыхъ первая (I) опредѣляетъ одинъ конецъ хорды M, какъ пересѣченіе этой хорды

$$l\alpha+m\beta+n=0$$

съ прямою

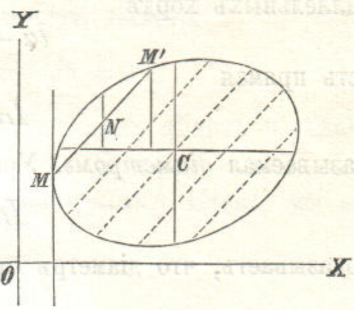
$$\alpha=-\frac{ln}{m^2\lambda^2+l^2}+R_n,$$

а система (II)—другой конецъ хорды M', какъ пересѣченіе хорды

$$l\alpha+m\beta+n=0$$

съ прямою

$$\alpha=-\frac{ln}{m^2\lambda^2+l^2}-R_n \text{(см. чер. 51).}$$



Черт. 51.

Средина N хорды $\overline{MM'}$ можетъ быть опредѣлена, какъ пересѣченіе прямой

$$l\alpha+m\beta+n=0$$

съ прямою

$$\alpha=-\frac{ln}{m^2\lambda^2+l^2}.$$

141. Опредѣлимъ теперь геометрическое мѣсто срединъ хордъ, параллельныхъ хордѣ $\overline{MM'}$. Для этой цѣли придется исключить n изъ двухъ уравненій:

$$l\alpha + m\beta + n = 0 \text{ и } \alpha = -\frac{ln}{m^2\lambda^2 + l^2}.$$

Изъ перваго уравненія получимъ

$$n = -l\alpha - m\beta$$

и подставимъ это выраженіе коэффиціента n во второе уравненіе, тогда получимъ

$$\alpha = -\frac{l(-l\alpha - m\beta)}{m^2\lambda^2 + l^2},$$

откуда

$$(m^2\lambda^2 + l^2)\alpha = l^2\alpha + lm\beta,$$

или окончательно

$$m\lambda^2\alpha = l\beta.$$

Послѣднее уравненіе можетъ быть написано въ слѣдующемъ видѣ

$$Lm\alpha - l\beta = 0.$$

Итакъ, мы видимъ, что геометрическое мѣсто срединъ хордъ, параллельныхъ хордѣ

$$l\alpha + m\beta + n = 0$$

есть прямая

$$Lm\alpha - l\beta = 0,$$

называемая *діаметромъ*. Уравненіе

$$Lm\alpha - l\beta = 0$$

показываетъ, что діаметръ проходитъ черезъ центръ.

Сопряженные діаметры.

142. Разсмотримъ хорды, параллельныя нѣкоторому направленію

$$l\alpha + m\beta + n = 0. \tag{1}$$

Эти хорды дѣлятся пополамъ діаметромъ

$$Lm\alpha - l\beta = ,0$$

(*)

Разсмотримъ теперь хорды

$$l_1\alpha + m_1\beta + n_1 = 0, \tag{2}$$

параллельныя діаметру (*), гдѣ можно принять

$$l_1 = Lm, \quad m_1 = -l.$$

Уравненіе діаметра, дѣлящаго хорды (2) пополамъ будетъ

$$Lm_1\alpha - l_1\beta = 0. \tag{**}$$

Подставляя сюда вмѣсто m_1 и l_1, ихъ выраженія черезъ l и m, получимъ

$$L(-l)\alpha - (Lm)\beta = 0$$

$$-L(l\alpha + m\beta) = 0,$$

откуда видимъ, что уравненіе діаметра, дѣлящаго хорды (2) пополамъ, будетъ окончательно

$$l\alpha + m\beta = 0. \tag{***}$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что діаметръ (***) параллеленъ первоначальнымъ хордамъ

$$l\alpha + m\beta + n = 0.$$

Изъ всего сказаннаго мы заключаемъ, что два діаметра

$$l\alpha + m\beta = 0 \text{ и } Lm\alpha - l\beta = 0$$

обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что каждый изъ нихъ дѣлитъ пополамъ хорды, параллельныя другому.

Такіе два діаметра называются *сопряженными*. Итакъ, мы видимъ, что для каждаго діаметра

$$l\alpha + m\beta = 0$$

существуетъ ему сопряженный:

$$Lm\alpha - l\beta = 0.$$

Оси эллипса.

143. Во всякомъ эллипсѣ существуютъ два взаимно перпендикулярныхъ сопряженныхъ діаметра, называемые *осями* эллипса.

Для нахожденія осей необходимо выразить условіе перпендикулярности двухъ сопряженныхъ діаметровъ

$$\left.\begin{aligned} l\alpha + m\beta = 0 \\ Lm\alpha - l\beta = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Раскрывая функціи α и β, получимъ

$$\left.\begin{aligned} l(Ax + By + D) + m(Ly + M) = 0 \\ Lm(Ax + By + D) - l(Ly + M) = 0 \end{aligned}\right\},$$

или еще такъ

$$\left.\begin{aligned} lAx + (lB + mL)y + lD + mM = 0 \\ LmAx + (LmB - lL)y + LmD - lM = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Условіе перпендикулярности напишется въ такомъ видѣ

$$(lA)(LmA) + (lB + mL)(LmB - lL) = 0,$$

откуда

$$lm\{A^2 + B^2 - L\} + m^2 LB - Bl^2 = 0.$$

Обозначая

$$\frac{l}{m} = u,$$

получимъ слѣдующее квадратное уравненіе для опредѣленія u, соотвѣтствующаго направленію оси

$$u^2 + u\,\frac{L - A^2 - B^2}{B} - L = 0. \qquad (*)$$

144. Это уравненіе даетъ два корня $u = u_0$, $u = u_1$ и, слѣдовательно, эллипсъ имѣетъ двѣ взаимно-перпендикулярныя оси

$$\left.\begin{aligned} u_0\alpha + \beta = 0 \\ L\alpha - u_0\beta = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (**)$$

Другой корень не даетъ новыхъ осей, ибо уравненіе (*) показываетъ, что $u_0 u_1 = -L$, такъ что уравненія

$$u_1\alpha + \beta = 0$$
$$L\alpha - u_1\beta = 0,$$

послѣ замѣны u_1 на $-\dfrac{L}{u_0}$, обращаются въ уравненія (**).

145. Уравненіе (*) не даетъ опредѣленнаго значенія для u, когда

дробь

$$\frac{L - A^2 - B^2}{B}$$

будетъ имѣть видъ $\frac{0}{0}$, т. е. когда будетъ

$$\left.\begin{array}{r} B = 0 \\ L - A^2 - B^2 = 0 \end{array}\right\},$$

другими словами, когда

$$B = 0,\ L = A^2, \text{ или } B = 0,\ AC - B^2 = A^2,$$

$$\text{или } B = 0,\ A = C.$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе (A) опредѣляетъ нѣкоторый кругъ, ибо оно имѣетъ видъ

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

и по раздѣленіи на A, можетъ быть приведено къ слѣдующему виду

$$\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2}{A^2} - \frac{F}{A}.$$

Послѣднее уравненіе опредѣляетъ кругъ, имѣющій центръ въ точкѣ

$$\left(-\frac{D}{A},\ -\frac{E}{A}\right)$$

и радіусъ

$$\sqrt{\frac{D^2 + E^2}{A^2} - \frac{F}{A}}.$$

Итакъ, мы видимъ, что кругъ есть частный случай эллипса и имѣетъ безчисленное множество взаимно-перпендикулярныхъ сопряженныхъ діаметровъ.

Примѣръ.

$$3x^2 - 4xy + 2y^2 - x - 1 = 0.$$

Послѣ разложенія на сумму квадратовъ будетъ

$$2\left(3x - 2y - \frac{1}{2}\right)^2 + (2y - 1)^2 - \frac{15}{2} = 0.$$

Возьмемъ уравненія двухъ сопряженныхъ діаметровъ:

$$\left.\begin{aligned} l\left(3x-2y-\frac{1}{2}\right)+m(2y-1)=0 \\ 2m\left(3x-2y-\frac{1}{2}\right)-l(2y-1)=0 \end{aligned}\right\}\text{(ибо } L=2)$$

Эта система можетъ быть написана такъ:

$$3lx+2(m-l)y-\frac{1}{2}l-m=0$$

$$6mx-2(2m+l)y-m+l=0.$$

Условіе перпендикулярности будетъ:

$$(3l).(6m)+2(m-l).2(-2m-l)=0,$$

или

$$4l^2+22lm-8m^2=0.$$

Раздѣляя на $4m^2$, получимъ:

$$\left(\frac{l}{m}\right)^2+\frac{11}{2}\cdot\frac{l}{m}-2=0,$$

откуда, полагая $u=\dfrac{l}{m}$, получимъ

$$u_0=\frac{-11+3\sqrt{17}}{4}$$

$$u_1=\frac{-11-3\sqrt{17}}{4}$$

Уравненія двухъ осей эллипса будутъ

$$(3\sqrt{17}-11)\left(3x-2y-\frac{1}{2}\right)+4(2y-1)=0$$

$$(-3\sqrt{17}-11)\left(3x-2y-\frac{1}{2}\right)+4(2y-1)=0.$$

Уравненіе эллипса, отнесенное къ осямъ.

146. Если мы возьмемъ за новое начало координатъ центръ эллипса и расположимъ новую ось x-овъ по одной изъ осей эллипса, новую же ось y-овъ по другой оси, тогда мы замѣтимъ, что для каждаго значенія новой абсциссы OP будутъ соотвѣтствовать двѣ ординаты PM и PM', равныя по численной величинѣ, но съ обратными знаками; точно также каждой ординатѣ OQ будутъ соотвѣтствовать

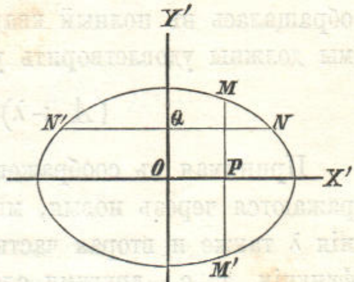
двѣ абсциссы QN и QN', равныя по численной величинѣ и съ обратными знаками (см. черт. 52).

Отсюда мы заключаемъ, что преобразованное къ новымъ осямъ уравненіе не должно заключать членовъ съ первыми степенями x и y, а также члена съ произведеніемъ координатъ xy, другими словами уравненіе должно имѣть видъ

$$A_1 x_1{}^2 + C_1 y_1{}^2 + F_1 = 0$$

147. Мы видѣли уже, что перенесеніе начала координатъ въ центръ уничтожаетъ члены съ первыми степенями координатъ, такъ что уравненіе эллипса (A) обращается въ слѣдующее

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + \frac{P}{LA} = 0$$



Черт. 52.

148. Теперь остается повернуть оси координатъ вокругъ начала на такой уголъ, чтобы эти оси совпали съ осями эллипса. Послѣ этого новаго преобразованія координатъ коэффиціентъ при произведеніи координатъ долженъ пропасть. Наоборотъ, мы можемъ поставить себѣ вопросъ, на какой уголъ надо повернуть оси координатъ, чтобы пропалъ изъ уравненія членъ съ произведеніемъ координатъ.

Пусть оси координатъ повернуты на нѣкоторый уголъ, такъ что выраженіе

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2$$

преобразовывается въ подобное-же, но только, очевидно, съ другими коэффиціентами

$$A_1 x_1{}^2 + 2B_1 x_1 y_1 + C_1 y_1{}^2,$$

такъ что

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 = A_1 x_1{}^2 + 2B_1 x_1 y_1 + C_1 y_1{}^2 \qquad (*)$$

Кромѣ того мы знаемъ, что разстояніе отъ точки до начала координатъ выражается одинаково, какъ въ старыхъ, такъ и въ новыхъ координатахъ

$$x'^2 + y'^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2 \qquad (**)$$

Умножаемъ теперь уравненіе (**) на нѣкоторый пока произвольный множитель λ и сложимъ съ уравненіемъ (*), тогда мы получимъ

$$(A+\lambda)x'^2+2Bx'y'+(C+\lambda)y'^2=$$
$$=(A_1+\lambda)x_1^{\,2}+2B_1x_1y_1+(C_1+\lambda)y_1^{\,2} \qquad (***)$$

Подберемъ теперь λ такъ, чтобы первая часть уравненія (***) обращалась въ полный квадратъ линейной функціи. Для этой цѣли мы должны удовлетворить уравненію

$$(A+\lambda)(C+\lambda)-B^2=0. \qquad (1)$$

Принимая въ соображеніе, что старыя координаты линейно выражаются черезъ новыя, мы заключаемъ, что для выбраннаго значенія λ также и вторая часть дѣлается полнымъ квадратомъ линейной функціи, т. е., другими словами, удовлетворяется уравненіе

$$(A_1+\lambda)(C_1+\lambda)-B_1^{\,2}=0 \qquad (2)$$

Уравненія (1) и (2), которыя еще можно написать такъ

$$\left.\begin{aligned}\lambda^2+(A+C)\lambda+AC-B^2&=0\\ \lambda^2+(A_1+C_1)\lambda+A_1C_1-B_1^{\,2}&=0\end{aligned}\right\},$$

должны удовлетворяться при однихъ и тѣхъ-же значеніяхъ λ, слѣдовательно, должны существовать равенства

$$A+C=A_1+C_1$$

$$AC-B^2=A_1C_1-B_1^{\,2}.$$

Итакъ, мы видимъ, что формулы $A+C$ и $AC-B^2$ не мѣняютъ своей величины при преобразованіи координатъ и называются поэтому *инваріантами* преобразованія координатъ.

149. При помощи инваріантовъ легко опредѣлить коэффиціенты въ уравненіи эллипса—отнесенномъ къ осямъ. Это уравненіе будетъ имѣть видъ

$$A_1x^2+C_1y^2+\frac{P}{AL}=0,$$

гдѣ коэффиціенты A_1 и C_1 опредѣляются изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned}A_1+C_1&=A+C\\ A_1C_1&=AC-B^2\end{aligned}\right\}.$$

Второе изъ уравненій этихъ есть не что иное какъ уравненіе $A_1C_1 - B_1{}^2 = AC - B^2$, въ которомъ принято во вниманіе, что $B_1 = 0$. Итакъ, мы видимъ, что коэффиціенты A_1 и C_1 опредѣляются какъ корни квадратнаго уравненія

$$\xi^2 - (A + C)\,\xi + AC - B^2 = 0.$$

Корни этого уравненія суть

$$\xi = \frac{A+C}{2} \pm \sqrt{\frac{(A+C)^2}{4} - AC + B^2} =$$

$$= \frac{A+C}{2} \pm \sqrt{\frac{(A+C)^2}{4} - L}.$$

Легко замѣтить, что корни одного и того-же знака, ибо $L > 0$, такъ что $\sqrt{\frac{(A+C)^2}{4} - L}$ по абсолютной величинѣ меньше абсолютной величины $\frac{A+C}{2}$. Кромѣ того, эти оба корня вещественны, ибо

$$\sqrt{\frac{(A+C)^2}{4} - AC + B^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2},$$

причемъ подкоренная величина, состоящая изъ двухъ квадратовъ, положительна.

150. Обозначимъ корни черезъ ξ_0 и ξ_1. Тогда вмѣсто одного коэффиціента, напр. A_1 придется взять одинъ изъ корней, а вмѣсто другого—другой.

Можно сдѣлать два выбора: или $A_1 = \xi_0$, $C_1 = \xi_1$, или же $A_1 = \xi_1$, $C_1 = \xi_0$; первый выборъ будетъ соотвѣтствовать принятію за ось x-овъ одной изъ осей симметріи эллипса, а другой выборъ принятію другой оси.

151. Итакъ, послѣ преобразованія уравненія эллипса къ осямъ, уравненіе это принимаетъ видъ

$$A_1 x^2 + C_1 y^2 + \frac{P}{AL} = 0.$$

Переносимъ членъ $\frac{P}{AL}$ во вторую часть уравненія и дѣлимъ обѣ части на $\dfrac{-P}{AL}$, тогда получимъ уравненіе

$$\frac{x^2}{\dfrac{-P}{A_1 AL}} + \frac{y^2}{\dfrac{-P}{AC_1 L}} = 1.$$

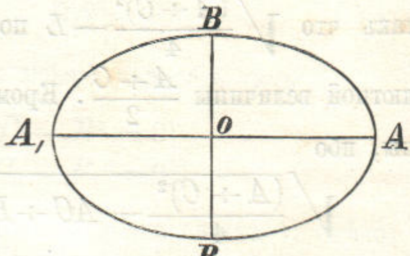
Принимая во вниманіе, что $P<0$, мы можемъ обозначить $\dfrac{-P}{A_1 AL} = a^2$, $\dfrac{-P}{AC_1 L} = b^2$,
откуда получимъ

$$a = \sqrt{\frac{-P}{A_1 AL}},\ b = \sqrt{\frac{-P}{AC_1 L}} \quad . \qquad (*)$$

Уравненіе эллипса принимаетъ окончательно слѣдующій простой видъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Полагая въ послѣднемъ уравненіи $y=0$, получимъ $x^2=a^2$, $x=\pm a$, откуда замѣчаемъ, что a есть длина полуоси $\overline{OA}$ (см. черт. 53); точно также замѣчаемъ, полагая $x=0$, что $y=\pm b$ и что b есть не что иное какъ другая полуось $\overline{OB}$. Обыкновенно корни квадратнаго уравненія выбираютъ такъ, чтобы полуось a была больше полуоси b, другими словами, принимаютъ за новую ось x-овъ большую полуось эллипса. Для этой цѣли, какъ показываютъ выраженія (*), нужно взять за A_1 меньшій, а за C_1 большій по абсолютной величинѣ изъ корней ξ_0, ξ_1.



Черт. 53.

Примѣръ. Возьмемъ уравненіе

$$3x'^2 - 4x'y' + 2y'^2 - \frac{5}{4} = 0,$$

отнесенное уже къ центру.

Остается взять оси эллипса за новыя координатныя оси.

$$A + C = 3 + 2 = 5,\ AC - B^2 = 2.3 - 2^2 = 2,$$

откуда

$$A_1 + C_1 = 5$$
$$A_1 C_1 = 2$$

Уравненіе для опредѣленія A_1 и C_1 будетъ

$$\xi^2 - 5\xi + 2 = 0,$$

его корни

$$\xi_0 = \frac{5+\sqrt{17}}{2},\ \xi_1 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}.$$

Если возьмемъ за ось x-овъ большую полуось эллипса, тогда получимъ уравненіе:

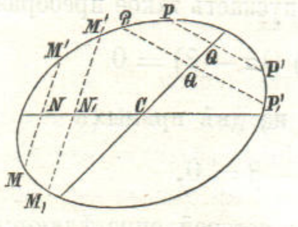
$$\frac{5-\sqrt{17}}{2}x^2 + \frac{5+\sqrt{17}}{2}y^2 = \frac{5}{4},$$

отсюда

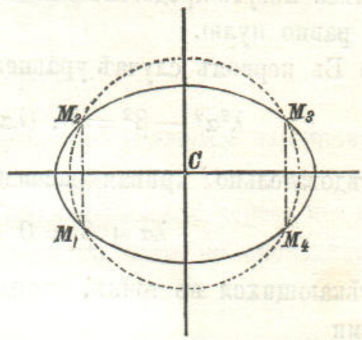
$$a^2 = \frac{5}{2(5-\sqrt{17})},\ b^2 = \frac{5}{2(5+\sqrt{17})}.$$

152. На основаніи изложеннаго легко указать, какъ по заданному очертанію эллипса построить центръ и его оси.

Проводимъ въ эллипсѣ произвольную хорду $\overline{MM'}$ и дѣлимъ ее въ точкѣ N пополамъ; проводимъ другую хорду (см. черт. 54) $\overline{M_1M_1'}$, параллельную хордѣ $\overline{MM'}$, дѣлимъ новую хорду точкою N_1 пополамъ. Проводимъ черезъ точки N и N_1 прямую, которая, очевидно,



Черт. 54.



Черт. 55.

будетъ однимъ изъ діаметровъ эллипса. Беремъ новую пару взаимно параллельныхъ хордъ $\overline{PP'}$ и $\overline{P_1P_1'}$, дѣлимъ эти хорды точками Q и Q_1 пополамъ; черезъ двѣ точки Q и Q_1 проводимъ прямую, которая будетъ новымъ діаметромъ эллипса.

Оба указанные діаметра пересѣкутся между собою въ искомомъ центрѣ C.

Когда центръ C найденъ, оси построятся слѣдующимъ образомъ.

Изъ центра эллипса, какъ центра, радіусомъ большимъ меньшей полуоси и меньшимъ большой описываемъ кругъ, который пересѣчетъ эллипсъ въ четырехъ точкахъ M_1, M_2, M_3, M_4 (см. черт. 55). Соединяя попарно точки M_1 и M_2, M_3 и M_4, получимъ двѣ хорды $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_3M_4}$ параллельныя между собою, параллельно которымъ проходитъ черезъ центръ одна изъ осей эллипса, другая-же ось будетъ перпендикулярна къ двумъ указаннымъ хордамъ.

Изслѣдованіе уравненія (A) въ случаѣ, когда $AC-B^2<0$.

153. Разсмотримъ тотъ случай въ изслѣдованіи кривыхъ второго порядка, когда, по разложеніи общаго уравненія на сумму квадратовъ, мы приведемъ его къ виду

$$L\alpha^2+\beta^2+P=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (C),$$

причемъ

$$L=AC-B^2<0.$$

Положивъ $L=-\lambda^2$, приведемъ уравненіе (C) къ виду

$$\lambda^2\alpha^2-\beta^2=P.$$

Здѣсь могутъ представиться два случая: a) когда $P=0$ и b) когда P не равно нулю.

a) Въ первомъ случаѣ уравненіе допускаетъ такое преобразованіе:

$$\lambda^2\alpha^2-\beta^2=0,\ (\lambda\alpha+\beta)\,(\lambda\alpha-\beta)=0$$

и, слѣдовательно, кривая распадается на двѣ прямыхъ

$$\lambda\alpha+\beta=0 \text{ и } \lambda\alpha-\beta=0,$$

пересѣкающихся въ точкѣ, координаты которой опредѣляются уравненіями

$$\alpha=0 \text{ и } \beta=0$$

b) Въ случаѣ-же P не $=0$, уравненіе опредѣляетъ особую кривую, называемую *гиперболой*.

Примѣры.

a) $$2x^2+4xy-2y^2+4x+1=0.$$

Разлагаемъ на сумму квадратовъ:

$$2\,(x+y+1)^2-(2y+1)^2=0,$$

отсюда

$$\sqrt{2}\,(x+y+1)+(2y+1)=0$$

$$\sqrt{2}\,(x+y+1)-(2y+1)=0$$

Это уравненія двухъ прямыхъ; координаты точки ихъ пересѣченія опредѣлятся изъ уравненій

$$x+y+1=0 \text{ и } 2y+1=0,$$

откуда

$$x=-\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}.$$

b) $x^2+2xy-y^2+2x=0$, $2(x+y+1)^2-(2y+1)^2-1=0$... Это гипербола.

Гипербола.

154. Общее уравненіе (A) кривыхъ второго порядка опредѣляетъ гиперболу въ томъ случаѣ, когда оно можетъ быть приведено къ виду

$$\lambda^2\alpha^2-\beta^2=P.$$

Здѣсь можно различать два случая: когда $P>0$ и когда $P<0$. Разсмотримъ сначала первый случай. Положивъ тогда $P=+p^2$, получимъ уравненіе гиперболы въ такомъ видѣ

$$\lambda^2\alpha^2-\beta^2=p^2.$$

Центръ.

155. Точка C, координаты которой опредѣляются изъ уравненій $\alpha=0$ и $\beta=0$, будетъ центромъ гиперболы, т. е. такою точкою, въ которой будутъ дѣлиться пополамъ всѣ проходящія черезъ нее хорды гиперболы, по какому бы направленію мы ихъ не проводили. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе всякой хорды, проходящей черезъ C, будетъ

$$\beta=l\alpha\ \ldots\ldots\ldots\ (*).$$

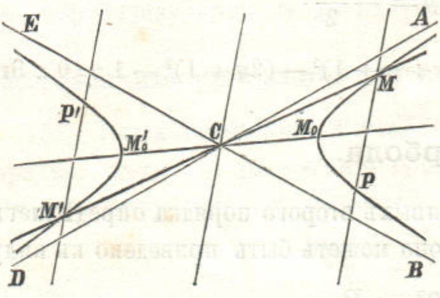
Найдемъ координаты концовъ этой хорды. Для этого нужно рѣшить уравненіе этой хорды совмѣстно съ уравненіемъ гиперболы

$$\beta=l\alpha,\ \lambda^2\alpha^2-\beta^2=p^2.$$

Эта система равносильна системѣ двухъ слѣдующихъ

$$(1)\ldots\begin{cases}\beta=l\alpha\\ \alpha=+\dfrac{p}{\sqrt{\lambda^2-l^2}}\end{cases}\qquad (2)\ldots\begin{cases}\beta=l\alpha\\ \alpha=-\dfrac{p}{\sqrt{\lambda^2-l^2}}.\end{cases}$$

Первая изъ этихъ системъ даетъ координаты одного конца M, а другая—другого M' хорды (см. черт. 56). Не рѣшая этихъ уравненій, замѣтимъ, что обѣ точки M и M' лежатъ на прямой $\beta = l\alpha$, при пересѣченіи ея съ параллельными прямыми MP и $M'P'$, имѣющими уравненія



Черт. 56.

$$\alpha = + \frac{p}{\sqrt{\lambda^2 - l^2}} \text{ и}$$

$$\alpha = - \frac{p}{\sqrt{\lambda^2 - l^2}},$$

слѣдовательно, если пересѣчемъ хорду $\beta = l\alpha$ третьею прямою $\alpha = 0$, параллельною первымъ двумъ и проходящею по срединѣ между ними, то получимъ координаты средины хорды MM'. Но точка опредѣляемая уравненіями $\alpha = 0$ и $\beta = l\alpha$ или $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ и есть точка C.

Слѣдовательно, точка C служитъ срединою всѣхъ хордъ гиперболы, проходящихъ черезъ нее

Ассимптоты.

156. Системы уравненія (1) и (2) показываютъ, что прямая $\beta = l\alpha$, проходящая черезъ C, пересѣкаетъ гиперболу только тогда, когда $l < \lambda$, ибо при $l > \lambda$, выраженіе $\sqrt{\lambda^2 - l^2}$ обращается въ мнимое, что въ геометрическомъ анализѣ говоритъ о невозможности вопроса. Иными словами, если черезъ центръ проведемъ двѣ прямыя CA и CB, уравненія которыхъ $\beta = \lambda\alpha$ и $\beta = -\lambda\alpha$, то всѣ точки гиперболы будутъ расположены внутри двухъ вертикальныхъ угловъ ACB и DCE, образуемыхъ этими прямыми. Въ самомъ дѣлѣ, будемъ пересѣкать гиперболу прямыми, проходящими черезъ центръ. Уравненіе $\beta = l\alpha$ при перемѣнномъ l опредѣляетъ всѣ такія прямыя. При $l = 0$, сѣкущая обратится въ прямую $\beta = 0$ и системы (1) и (2), которыя теперь обратятся въ

$$(1_0)\ldots\begin{cases}\beta = 0\\ \alpha = +\dfrac{p}{\lambda}\end{cases} \quad \text{и } (2_0)\ldots\begin{cases}\beta = 0\\ \alpha = -\dfrac{p}{\lambda},\end{cases}$$

опредѣлять двѣ точки пересѣченія съ гиперболой M_0 и M_0' (см. черт. 56). Съ увеличеніемъ l, сѣкущая будетъ вращаться около C, приближаясь къ CA и, пока $l < \lambda$, системы (1) и (2) всегда будутъ опредѣлять двѣ дѣйствительныя точки пересѣченія сѣкущей съ гиперболой. Точки эти все будутъ удаляться отъ C и при $l = \lambda$, когда сѣкущая сольется съ прямою CA, которой уравненіе $\beta = \lambda\alpha$, обѣ точки пересѣченія удалятся въ безконечность, ибо при $l = \lambda$ системы (1) и (2) обратятся въ

$$(1)\ \beta = \lambda\alpha \text{ и } \alpha = +\frac{p}{\sqrt{\lambda^2 - \lambda^2}} = \frac{p}{0} = \infty$$

$$(2)\ \beta = \lambda\alpha \text{ и } \alpha = -\frac{p}{\sqrt{\lambda^2 - \lambda^2}} = -\frac{p}{0} = -\infty$$

При дальнѣйшемъ увеличеніи l, т. е. когда сѣкущая выйдетъ изъ угла ACB, обѣ точки пересѣченія сдѣлаются мнимыми, т. е. несуществующими.

Тоже самое замѣтимъ, если будемъ уменьшать l отъ 0 до $-\lambda$: при $l = -\lambda$ обѣ точки пересѣченія удалятся въ ∞, и дальше сдѣлаются мнимыми.

Прямыя CA и CB называются ассимптотами гиперболы, уравненія ихъ суть

$$\beta = \lambda\alpha \text{ и } \beta = -\lambda\alpha.$$

Эти два уравненія можно соединить въ одно

$$(\beta - \lambda\alpha)(\beta + \lambda\alpha) = 0$$

и это будетъ уравненіе совокупности обѣихъ ассимптотъ. Его можно представить въ видѣ

$$\beta^2 - \lambda^2\alpha^2 = 0,$$

или

$$-\lambda^2\alpha^2 + \beta^2 = 0,$$

или, наконецъ,

$$L\alpha^2 + \beta^2 = 0.$$

Итакъ, слѣдовательно, уравненіе совокупности ассимптотъ получится, если въ уравненіи гиперболы отбросимъ членъ P.

157. Здѣсь кстати разсмотримъ тотъ случай гиперболы, когда $P < 0$.

Полагая тогда $P = -p^2$, получимъ уравненіе гиперболы въ такомъ видѣ

$$\lambda^2\alpha^2 - \beta^2 = -p^2,$$

или

$$\beta^2 - \lambda^2\alpha^2 = p^2.$$

Эта гипербола имѣетъ тѣ-же ассимптоты

$$\beta^2 - \lambda^2\alpha^2 = 0,$$

или

$$\lambda^2\alpha^2 - \beta^2 = 0,$$

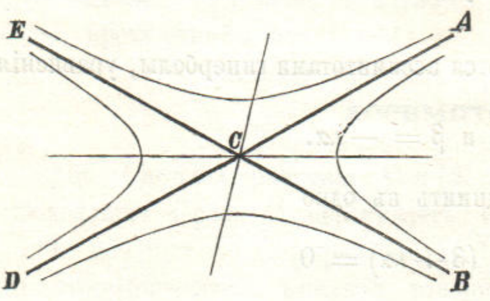
или, наконецъ,

$$\beta = \lambda\alpha \text{ и } \beta = -\lambda\alpha.$$

Будемъ пересѣкать ее прямыми, проходящими черезъ центръ; ихъ уравненіе $\beta = l\alpha$. Рѣшая это уравненіе совмѣстно съ уравненіемъ гиперболы, получимъ для опредѣленія точекъ пересѣченія съ гиперболой слѣдующія двѣ системы

$$(1) \begin{cases} \beta = l\alpha \\ \alpha = +\dfrac{p}{\sqrt{l^2 - \lambda^2}} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \beta = l\alpha \\ \alpha = -\dfrac{p}{\sqrt{l^2 - \lambda^2}}. \end{cases}$$



Черт. 57.

Эти системы даютъ дѣйствительныя рѣшенія уже только при $l > \lambda$, слѣдовательно, всѣ точки новой гиперболы лежатъ въ другой парѣ вертикальныхъ угловъ, образуемыхъ ассимптотами AD и BE, именно, въ углахъ ACE и BCD (см. черт. 57).

Двѣ гиперболы

$$L\alpha^2 + \beta^2 = +P \text{ и } L\alpha^2 + \beta^2 = -P,$$

имѣющія общія ассимптоты, но расположенныя въ разныхъ углахъ называются *сопряженными*.

Примѣръ. $x^2 - 3xy + 2y^2 - 7x + 2 = 0$.

Разлагая на сумму квадратовъ:

$$\left(x-\frac{3}{2}y-\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}y+\frac{21}{2}\right)^2+100=0.$$

Уравненіе ассимптотъ: $\left(x-\frac{3}{2}y-\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}y+\frac{21}{2}\right)^2=0$,

$$x-y+7=0$$

или

$$x-2y-14=0.$$

Координаты центра, какъ точки пересѣченія ассимптотъ, найдемъ, рѣшая эти уравненія: $x=-28$, $y=-21$.

Сопряженные діаметры.

158. Всѣ тѣ разсужденія, которыя мы приводили касательно діаметровъ эллипса, отъ слова до слова прилагаются и къ изслѣдованію уравненія гиперболы, такъ какъ послѣднее отличается отъ уравненія эллипса только тѣмъ, что въ немъ множитель L отрицателенъ; тогда какъ у эллипса онъ положителенъ. Въ гиперболѣ всѣ діаметры проходятъ черезъ центръ и существуетъ безчисленное множество паръ сопряженныхъ діаметровъ: для каждаго діаметра $l\alpha+m\beta=0$ всегда существуетъ сопряженный ему діаметръ, уравненіе котораго есть $L\alpha m-l\beta=0$.

Уравненія сопряженныхъ діаметровъ можно написать въ такомъ видѣ $\beta=u\alpha$, $\beta=\frac{-L}{u}\alpha$, или $\beta=u\alpha$ и $\beta=v\alpha$, гдѣ $v=-\frac{L}{u}$, такъ что $uv=-L=\lambda^2$. Слѣдовательно, если $u>\lambda$, то $v<\lambda$ и наоборотъ. А потому, на основаніи вышесказаннаго относительно ассимптотъ, имѣемъ основаніе утверждать, что одинъ изъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ пересѣкаетъ гиперболу, а другой—не пересѣкаетъ. Это составляетъ уже отличительную особенность гиперболы.

Оси гиперболы.

159. Подобно какъ въ эллипсѣ, оси симметріи гиперболы найдемъ, какъ пару взаимно перпендикулярныхъ сопряженныхъ діаметровъ. Возьмемъ уравненія двухъ сопряженныхъ діаметровъ

$$l\alpha+m\beta=0$$

$$Lm\alpha-l\beta=0.$$

Условіе взаимной перпендикулярности будетъ, какъ и для эллипса,

$$lm(A^2 + B^2 - L) + m^2 LB - Bl^2 = 0.$$

Обозначая отношеніе $\frac{l}{m} = u$, для опредѣленія послѣдняго получимъ квадратное уравненіе

$$u^2 + u\,\frac{L - A^2 - B^2}{B} - L = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (*).$$

Два корня этого уравненія u_0 и u_1 даютъ возможность написать уравненія осей гиперболы: $u_0\alpha + \beta = 0$ и $u_1\alpha + \beta = 0$.

160. Уравненіе совокупности обѣихъ осей будетъ

$$(u_0\alpha + \beta)(u_1\alpha + \beta) = 0, \text{ или } u_0 u_1 \alpha^2 + (u_0 + u_1)\alpha\beta + \beta^2 = 0,$$

такъ какъ u_0 и u_1 суть корни квадратнаго уравненія (*), то

$$u_0 + u_1 = \frac{A^2 + B^2 - L}{B}, \; u_0 u_1 = -L,$$

отсюда уравненіе совокупности осей представится въ такомъ видѣ

$$-L\alpha^2 + \frac{A^2 + B^2 - L}{B} \cdot \alpha\beta + \beta^2 = 0 \quad . \; . \; . \; (**).$$

161. *Теорема*. Оси симметріи гиперболы дѣлятъ углы между ассимптотами пополамъ.

Для доказательства этой теоремы, мы найдемъ уравненіе совокупности обоихъ биссектровъ угловъ между ассимптотами и полученное уравненіе сравнимъ съ уравненіемъ осей (**). Будемъ опредѣлять биссектры угла, какъ геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ сторонъ угла, которыя въ нашемъ случаѣ будутъ не что иное, какъ ассимптоты, которыхъ уравненія: $\beta - \lambda\alpha = 0$ и $\beta + \lambda\alpha = 0$.

Уравненія биссектровъ угловъ между ассимптотами будутъ

$$\frac{\beta - \lambda\alpha}{\Delta_1} = + \frac{\beta + \lambda\alpha}{\Delta_2} \ldots (1), \quad \frac{\beta - \lambda\alpha}{\Delta_1} = - \frac{\beta + \lambda\alpha}{\Delta_2} \ldots (2),$$

причемъ

$$\Delta_1 = \sqrt{\lambda^2 A^2 + (\lambda B - L)^2} \text{ и } \Delta_2 = \sqrt{\lambda^2 A^2 + (\lambda B + L)^2}.$$

Уравненія (1) и (2) могутъ быть переписаны такъ

$$\beta(\Delta_2 - \Delta_1) - \lambda(\Delta_1 + \Delta_2)\alpha = 0, \; \beta(\Delta_2 + \Delta_1) - \lambda(\Delta_2 - \Delta_1)\alpha = 0.$$

Перемножая послѣднія два уравненія, получимъ уравненіе совокупности обоихъ биссектровъ угла между ассимптомами.

$$\beta^2(\Delta_2{}^2 - \Delta_1{}^2) - 2\lambda\alpha\beta(\Delta_1{}^2 + \Delta_2{}^2) + \lambda^2\alpha^2(\Delta_2{}^2 - \Delta_1{}^2) = 0 \quad . \quad . (3)$$

$$\Delta_2{}^2 - \Delta_1{}^2 = [\lambda^2 A^2 + (\lambda B + L)^2] - [\lambda^2 A^2 + (\lambda B - L)^2] = 4\lambda BL$$

$$\Delta_1{}^2 + \Delta_2{}^2 = [\lambda^2 A^2 + (\lambda B - L)^2] + [\lambda^2 A^2 + (\lambda B + L)^2] = 2\lambda^2[A^2 + B^2 - L],$$

откуда уравненіе (3) приметъ такой видъ

$$4\lambda BL \,.\, \beta^2 - 2\lambda\alpha\beta \,.\, 2\lambda^2(A^2 + B^2 - L) + \lambda^2\alpha^2 \,.\, 4\lambda BL = 0,$$

или по раздѣленіи на $4\lambda BL$

$$\beta^2 + \frac{A^2 + B^2 - L}{B}\alpha\beta - L\alpha^2 = 0$$

(слѣдуетъ помнить при этомъ преобразованіи, что $\lambda^2 = -L$).

Сравнивая полученное уравненіе биссектровъ угловъ между ассимптотами съ уравненіемъ осей (**), замѣчаемъ полное тождество, что и говоритъ о справедливости предложенной теоремы.

Уравненіе гиперболы, отнесенное къ осямъ.

162. Уравненіе гиперболы, отнесенное къ центру, будетъ, очевидно,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \frac{P}{AL} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (1).$$

Теперь остается выбрать за оси координатъ оси симметріи гиперболы; для этой цѣли воспользуемся инваріантами преобразованія координатъ.

Подобно тому, какъ было для эллипса, мы замѣчаемъ, что уравненіе гиперболы послѣ преобразованія должно имѣть видъ

$$A_1x^2 + C_1y^2 + \frac{P}{AL} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (2).$$

гдѣ коэффиціенты A_1 и C_1 опредѣляются изъ условій: $A_1 + C_1 = A + C$ $A_1C_1 = L = AC - B^2$. Такъ какъ для гиперболы L есть число отрицательное, то корни уравненія

$$\xi^2 - (A + C)\,.\,\xi + AC - B^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . (3)$$

будутъ разныхъ знаковъ.

Оси гиперболы суть нечто иное, какъ пара сопряженныхъ діаметровъ, поэтому мы замѣчаемъ, что одна изъ осей пересѣкаетъ гиперболу, а другая не пересѣкаетъ.

Обыкновенно за коэффиціентъ A_1 въ уравненіи гиперболы

$$A_1x^2+C_1y^2+\frac{P}{AL}=0$$

выбираютъ тотъ изъ корней, при которомъ новая ось x-овъ пересѣкаетъ кривую. Для указанной цѣли выбираютъ за A_1 тотъ корень квадратнаго уравненія (3), который по знаку совпадаетъ со знакомъ $-\frac{P}{AL}$, ибо тогда при $y=0$ уравненіе (2) даетъ для x слѣдующее выраженіе

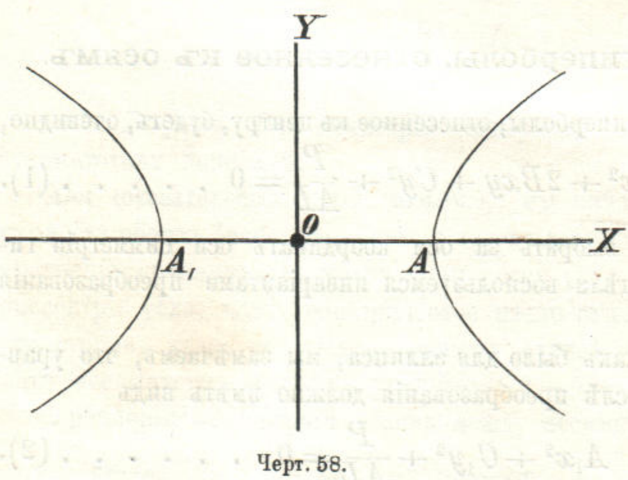
$$x=\pm\sqrt{\frac{-P}{A_1AL}}=\pm a,$$

гдѣ a—нѣкоторое вещественное число.

Введемъ другое обозначеніе:

$$b^2=\frac{P}{C_1AL},$$

гдѣ b будетъ непремѣнно вещественнымъ числомъ.



Черт. 58.

Уравненіе гиперболы (2) можетъ быть преобразовано слѣдующимъ образомъ

$$\frac{x^2}{\frac{-P}{A_1AL}}-\frac{y^2}{\frac{P}{C_1AL}}=1,$$

откуда окончательно $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ . . . . (*)

Полагая въ послѣднемъ уравненіи $y=0$, получимъ

$$x^2=a^2,\quad x=\pm a,$$

откуда замѣчаемъ, что a есть длина полуоси $\overline{OA}$ (см. чер. 58).

163. Ось $\overline{AA_1}$ называется *поперечною* или *дѣйствительною* осью гиперболы, а ось y-овъ, не пересѣкающая гиперболы, называется *мнимою* осью.

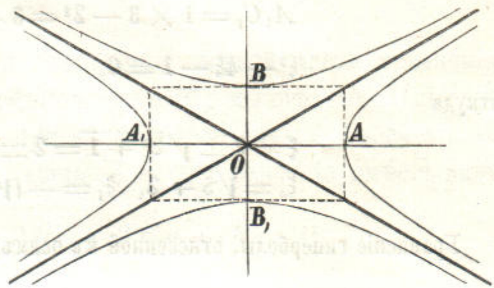
Число b называется мнимою полуосью гиперболы и можетъ получить геометрическое толкованіе при помощи построенія гиперболы, сопряженной съ данной.

164. Мы получимъ уравненіе ассимптотъ гиперболы, если во второй части уравненія (*) вмѣсто единицы поставимъ нуль:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,$$

откуда

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\cdot\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0,$$



Черт. 59.

или окончательно получимъ два уравненія ассимптотъ въ такомъ видѣ:

$$y=+\frac{b}{a}x, \qquad y=-\frac{b}{a}x.$$

Итакъ, мы видимъ, что ассимптоты суть діагонали прямоугольника, построеннаго на осяхъ a и b (см. черт. 59).

Разсмотримъ теперь гиперболу, сопряженную съ данною (*), уравненіе которой будетъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \ldots\ldots\ldots\ldots (**).$$

Сопряженная гипербола (**) имѣетъ тѣ же ассимптоты, что и прежняя (*), но вѣтви ея лежатъ въ тѣхъ двухъ изъ вертикальныхъ угловъ, въ которыхъ проходитъ мнимая ось гиперболы (*) и, слѣдовательно, эта ось для гиперболы (**) будетъ дѣйствительною, такъ что b можно опредѣлить какъ дѣйствительную полуось $\overline{OB}$ гиперболы сопряженной. Дѣйствительная ось гиперболы (*) есть въ то же время мнимая ось для гиперболы сопряженной.

Примѣръ.

$$x^2-4xy+3y^2-2x-1=0$$
$$x^2-2x(2y+1)+3y^2-1=0$$
$$-(x-2y-1)^2+y^2+4y+2=0$$
$$-(x-2y-1)^2+(y+2)^2-2=0.$$

Уравненіе, отнесенное къ центру, будетъ

$$x^2 - 4xy + 3y^2 + \frac{-2}{-1} = 0,$$

или

$$x^2 - 4xy + 3y^2 + 2 = 0.$$

Для полученія осей, полагаемъ

$$A_1 + C_1 = 1 + 3 = 4$$

$$A_1C_1 = 1 \times 3 - 2^2 = 3 - 4 = -1$$

$$\xi^2 - 4\xi - 1 = 0,$$

откуда

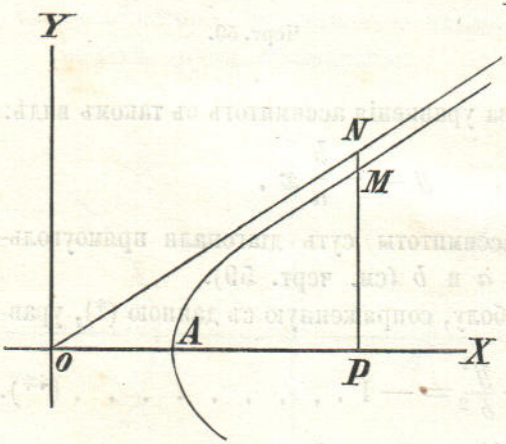
$$\xi = 2 \pm \sqrt{2^2 + 1} = 2 \pm \sqrt{5};$$

$$\xi_0 = \sqrt{5} + 2, \quad \xi_1 = -(\sqrt{5} - 2).$$

Уравненіе гиперболы, отнесенной къ осямъ, будетъ

$$-(\sqrt{5}-2)x^2 + (\sqrt{5}+2)y^2 + 2 = 0,$$

$$\frac{x^2}{\frac{2}{\sqrt{5}-2}} - \frac{y^2}{\frac{2}{\sqrt{5}+2}} = 1.$$



Черт. 60.

165. Покажемъ теперь, что разность MN (см. черт. 60) ординаты NP ассимптоты, соотвѣтствующей абсциссѣ OP, и ординаты MP гиперболы, соотвѣтствующей той-же абсциссѣ, имѣетъ предѣломъ нуль при увеличеніи OP. Въ самомъ дѣлѣ, разность эта выражатся такъ:

$$OP = x, \quad PM = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \text{ (по уравненію гиперболы)},$$

$$PN = \frac{b}{a}x \text{ (по уравненію ассимптоты)},$$

слѣдовательно,

$$NM = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) =$$

$$=\frac{b}{a}\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})\,(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{x^2-(x^2-a^2)}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=$$

$$=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Послѣдняя дробь, дѣйствительно, имѣетъ предѣломъ O при увеличеніи x.

166. Указывая пріемъ при разложеніи первой части уравненія (A) на сумму квадратовъ линейныхъ функцій, мы ограничились случаемъ, когда коэффиціентъ A при x^2 не равенъ нулю. Разсмотримъ теперь случай обратный, т. е. когда $A=0$. Уравненіе имѣетъ видъ

$$2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Этотъ случай ничего исключительнаго не представляетъ и даетъ, какъ мы увидимъ, гиперболу. Въ самомъ дѣлѣ, располагая по степенямъ y-ка и умножая для удобства уравненіе на C, получимъ

$$(Cy)^2+2Cy(Bx+E)+2CDx+FC=0$$

$$[Cy+(Bx+E)]^2-B^2x^2-2BEx-E^2+2CDx+FC=0,$$

откуда

$$(Cy+Bx+E)^2-B^2x^2-2(BE-CD)x+FC-E^2=0,$$

умноживъ на -1, получимъ

$$-(Cy+Bx+E)^2+(Bx)^2+2Bx\frac{BE-CD}{B}-FC+E^2=0,$$

откуда окончательно

$$-(Cy+Bx+E)^2+\left(Bx+\frac{BE-CD}{B}\right)^2-FC+$$

$$+E^2-\frac{(BE-CD)}{B^2}=0.$$

167. Остается разсмотрѣть случай, когда оба коэффиціента A и C равны нулю.

Въ этомъ случаѣ

$$2Bxy+2Dx+2Ey+F=0,$$

или, раздѣляя на 2, получимъ уравненіе

$$f(x,y)=Bxy+Dx+Ey+F_1=0,\ \text{гдѣ}\ F_1=\frac{F}{2}.$$

Въ этомъ случаѣ удобно поступать слѣдующимъ образомъ.

Обозначимъ черезъ α коэффиціентъ $By+D$ при x-сѣ, въ уравненіи $f(x, y)=o$, точно также черезъ β коэффиціентъ $Bx+E$ при y-кѣ, мы получимъ

$$By+D=\alpha,\ Bx+E=\beta,$$

умножая, получимъ

$$\alpha\beta=(By+D)(Bx+E)=B(Bxy+Dx+Ey)+DE.$$

На основаніи-же заданнаго уравненія

$$Bxy+Dx+Ey=-F_1,$$

откуда окончательно

$$\alpha\beta=DE-BF_1=K.$$

На основаніи-же тождества

$$\alpha\beta=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$$

получимъ окончательно уравненіе, разложенное на сумму квадратовъ линейныхъ функцій:

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=K.$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что, въ случаѣ $A=0$ и $C=0$, уравненіе (A) опредѣляетъ гиперболу.

Примѣръ.

$$3xy+4x-y+1=0 \qquad (*)$$

$\alpha=3y+4,\ \beta=3x-1,\ \alpha\beta=(3y+4)(3x-1)=3\ (3xy+4x-y)-4,$

но

$$3xy+4x-y=-1\ \text{(на основаніи уравненія (*))},$$

слѣдовательно,

$$\alpha\beta=-3\ .\ 1-4=-7,$$

откуда окончательно

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=-7,$$

или

$$\left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y+\frac{5}{2}\right)^2=-7.$$

Уравненіе

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=K$$

даетъ для ассимптотъ слѣдующее уравненіе

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\alpha\beta=0,$$

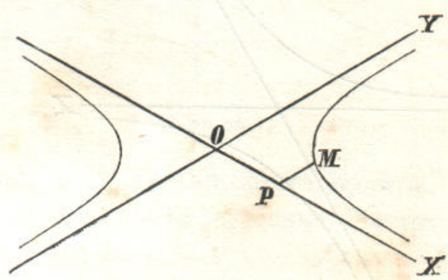
откуда уравненія ассимптотъ будутъ слѣдующія:

$$\alpha=0,\ \beta=0.$$

Уравненіе гиперболы, отнесенное къ ассимтотамъ.

168. Возьмемъ за оси координатъ ассимптоты гиперболы. Мы замѣчаемъ, что уравненіе не должно содержать членовъ съ первыми степенями x-са и y-ка, ибо начало находится въ центрѣ; это уравненіе имѣетъ видъ:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=H.$$



Черт. 61.

Прямыя параллельныя оси OY пересѣкаютъ кривую въ одной только точкѣ (см. черт. 61), такъ что каждому значенію x-са будетъ соотвѣтствовать только одно значеніе для y-ка, для чего необходимо долженъ равняться нулю коэффиціентъ C; подобнымъ-же образомъ мы покажемъ, что долженъ равняться нулю также и коэффиціентъ A, откуда получимъ уравненіе гиперболы, отнесенное къ ассимптотамъ, въ слѣдующемъ видѣ:

$$2Bxy=H,$$

или

$$xy=\frac{H}{2B}=\pm k^2.$$

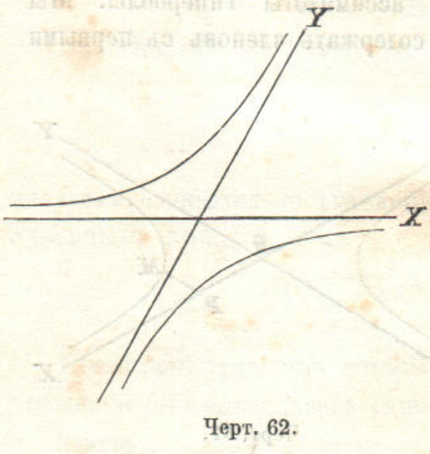
169. Если мы выберемъ положительными тѣ направленія ассимптотъ, между которыми заключается одна изъ вѣтвей кривой, то постоянная $\frac{H}{2B}$ должна быть положительная, ибо положительному x-су долженъ соотвѣтствовать положительный y и, наоборотъ, отрицательному x-су долженъ соотвѣтствовать отрицательный y. Если же мы выберемъ иное направленіе осей (см. черт. 62), тогда знакъ члена $\frac{H}{2B}$ долженъ быть отрицательный.

170. Итакъ, пусть выбраны тѣ направленія ассимптотъ, при которыхъ уравненіе гиперболы имѣетъ видъ

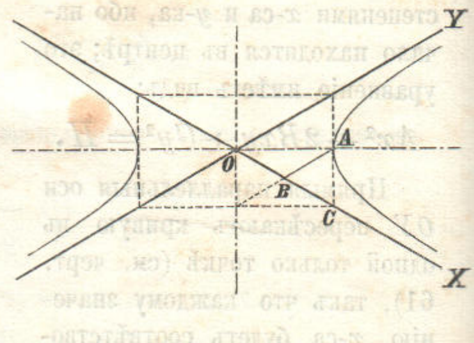
$$xy = k^2.$$

Покажемъ, какъ опредѣлить постоянное число k^2 по осямъ гиперболы.

Если мы возьмемъ вершину гиперболы A, то ея координаты



Черт. 62.



Черт. 63.

должны, очевидно, удовлетворять уравненію кривой: $xy = k^2$.

Такъ какъ кривая симметрична относительно оси OA, то

$$x = OB = y = BA = \frac{OC}{2} = \frac{\sqrt{OA^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

(см. черт. 63),

отсюда мы замѣчаемъ, что

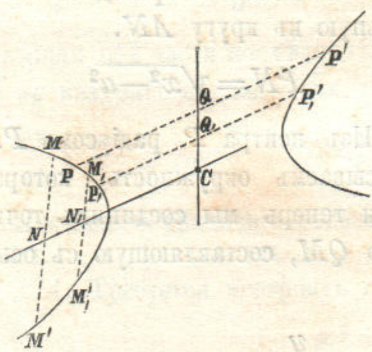
$$k^2 = \frac{a^2 + b^2}{4},$$

или, наконецъ,

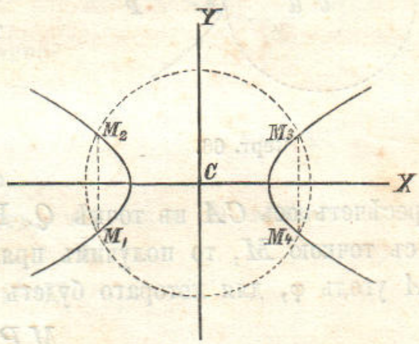
$$k = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

171. Покажемъ теперь, какъ по указанному очертанію гиперболы указать центръ, оси и ассимптоты. Проводимъ произвольную хорду MM' и дѣлимъ ее въ точкѣ N пополамъ; проводимъ другую хорду (см. черт. 64) M_1M_1', параллельно хордѣ MM', дѣлимъ новую хорду пополамъ въ точкѣ N_1.

Проводимъ черезъ точки N и N' прямую, которая, очевидно, будетъ однимъ изъ діаметровъ гиперболы. Беремъ новую пару взаимно параллельныхъ хордъ PP' и $P_1P'_1$, дѣлимъ эти хорды точками



Черт. 64.



Черт. 65.

Q и Q_1 пополамъ; черезъ двѣ точки Q и Q_1 проводимъ прямую, которая будетъ новымъ діаметромъ гиперболы. Оба указанные діаметра пересѣкутся въ искомомъ центрѣ C гиперболы.

Когда центръ C найденъ, оси гиперболы построятся слѣдующимъ образомъ.

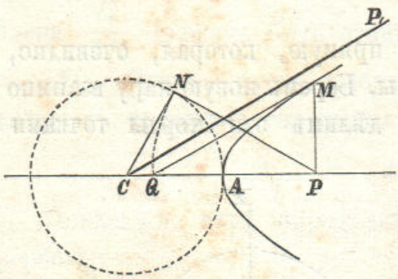
Изъ центра гиперболы C какъ центра радіусомъ большимъ дѣйствительной полуоси гиперболы описываемъ кругъ, который пересѣчетъ гиперболу въ четырехъ точкахъ M_1, M_2, M_3 и M_4 (см. черт. 65). Соединяя попарно точки M_1 и M_2, M_3 и M_4, получимъ двѣ хорды M_1M_2 и M_3M_4, параллельныя между собою, параллельно которымъ проходитъ одна изъ осей гиперболы; другая же ось будетъ перпендикулярна къ двумъ указаннымъ хордамъ.

172. Для построенія ассимптотъ поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Построеніе осей даетъ намъ вершины гиперболы и, слѣдовательно,

длину CA (см. черт. 66) дѣйствительный полуоси a, такъ что $CA = a$. Изъ центра C радіусомъ a описываемъ окружность круга AN. Беремъ произвольную точку M на гиперболѣ, координаты которой

$$x = CP \text{ и } y = PM$$

легко построить, разъ намъ оси извѣстны.



Черт. 66.

Уравненіе гиперболы показываетъ, что

$$\frac{y}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a}.$$

Длину $\sqrt{x^2 - a^2}$ мы получимъ, если изъ точки P проведемъ касательную къ кругу AN.

$$PN = \sqrt{x^2 - a^2}$$

Изъ центра P радіусомъ PN описываемъ окружность, которая пересѣчетъ ось CA въ точкѣ Q. Если теперь мы соединимъ точку Q съ точкою M, то получимъ прямую QM, составляющую съ осью CA уголъ φ, для котораго будетъ

$$tang\,\varphi = \frac{MP}{QP} = \frac{y}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Наконецъ, если мы проведемъ черезъ центръ C прямую, параллельную прямой QM, то получимъ искомую ассимптоту.

Построеніе эллипса и гиперболы по точкамъ.

173. Требуется построить эллипсъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Изъ начала координатъ, какъ центра, радіусами равными большей и малой полуоси проводимъ два круга AA_1 и BB_1, (см. черт. 67). Проводимъ черезъ начало координатъ O произвольную прямую OP, которая пересѣкаетъ оба круга BB' и AA' въ двухъ точкахъ Q и P. Черезъ точку P проведемъ прямую параллельно оси OY, а черезъ точку Q прямую параллельно оси OX, тогда мы получимъ въ пересѣченіи этихъ двухъ прямыхъ точку M, лежащую на эллипсѣ. Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ уголъ QOT через φ и пусть будутъ кромѣ того координаты точки M обозначены черезъ x и y, такъ что $x = + OS$, $y = + MS$, тогда $OS = OP \, Cos \, \varphi$, $MS = QT = OQ \, sin \, \varphi$, другими словами,

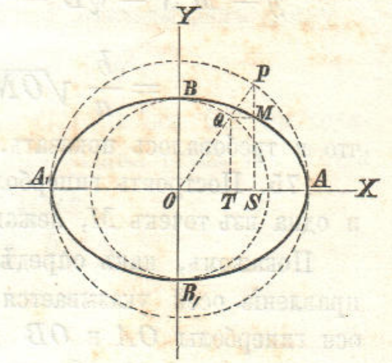
$$OS = x = a \cos\varphi, \; MS = y = b \sin\varphi,$$

откуда

$$\frac{x}{a} = \cos\varphi, \; \frac{y}{b} = \sin\varphi;$$

возвышая обѣ части послѣднихъ уравненій въ квадратъ и складывая, получимъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$



Черт. 67.

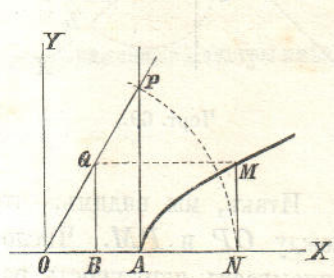
Послѣднее уравненіе показываетъ, что точка M лежитъ на эллипсѣ.

174. Требуется построить гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Для построенія точки M, соотвѣтствующей нѣкоторой абсциссѣ ON, поступаемъ такъ.

Длина a задана; откладываемъ ее по оси x (см. черт. 68), получимъ точку A. Въ точкѣ A возставляемъ перпендикуляръ къ оси X. Радіусомъ $= ON$, т. е. абсциссѣ искомой точки M, проводимъ окружность круга, которая пересѣчетъ прямую AP въ точкѣ P. Соединяемъ точку P съ началомъ координатъ и на полученной такимъ образомъ прямой указываемъ точку Q такъ, чтобы было:



Черт. 68.

$$\frac{OQ}{OP} = \frac{b}{a} = \frac{OB}{OA}.$$

Тогда, если мы проведемъ черезъ точку Q прямую параллельную оси x-овъ, то эта прямая пересѣчетъ перпендикуляръ къ оси X

проведенный черезъ точку N въ искомой точкѣ M, лежащей на гиперболѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая $MN=y$, $ON=x$, получимъ

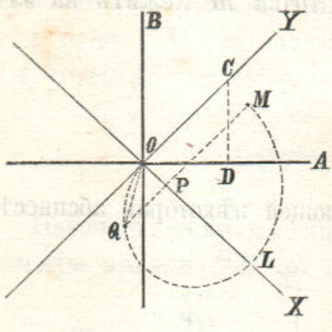
$$y=MN=QB=\frac{b}{a}\,PA=\frac{b}{a}\sqrt{\overline{PO}^2-\overline{OA}^2}=$$

$$=\frac{b}{a}\sqrt{\overline{ON}^2-a^2}=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

что и требовалось показать.

175. Построить гиперболу по точкамъ, когда заданы ассимптоты и одна изъ точекъ M, лежащихъ на гиперболѣ.

Покажемъ, какъ опредѣлять величину и направленіе осей. Направленіе осей указывается непосредственно, ибо мы показали, что оси гиперболы OA и OB дѣлятъ пополамъ углы между ассимптотами (см. черт. 69). Остается опредѣлить длину полуосей a и b гиперболы. Для этой цѣли поступаемъ такъ: возьмемъ за оси координатъ ассимптоты OX и OY; уравненіе гиперболы отнесенной къ ассимптотамъ будетъ



Черт. 69.

$$xy=k^2.$$

Если мы черезъ заданную на гиперболѣ точку M проведемъ прямую MP, параллельно одной изъ ассимптотъ, то для точки M координаты будутъ

$$x=OP,\ y=PM,$$

отсюда

$$\overline{OP}\cdot\overline{PM}=k^2.$$

Итакъ, мы видимъ, что число k есть средняя пропорціональная между OP и PM. Число k можно построить такъ: изъ центра P описываемъ окружность радіусовъ PM; эта окружность пересѣчетъ ассимптоту OX въ точкѣ L; на OL, какъ на діаметрѣ, строимъ кругъ OQL и на окружности этого круга указываемъ точку Q, какъ конецъ перпендикуляра, возстановленнаго къ діаметру OL въ точкѣ P.

Длина перпендикуляра PQ будетъ равна числу k, ибо

$$\overline{PQ}^2=\overline{OP}\cdot\overline{PL}.$$

Принимая съ другой стороны во вниманіе, что

$$2k = \sqrt{a^2 + b^2},$$

мы замѣчаемъ, что $2k$ есть гипотенуза треугольника, катеты котораго суть полуоси a и b. Поэтому для построенія полуосей a и b поступаемъ такъ: по направленію ассимптоты OY откладываемъ длину

$$OC = 2PQ = 2k = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Изъ точки C проводимъ перпендикуляръ CD на ось OA проходящую въ томъ углу между ассимптотами, гдѣ задана точка M. Тогда въ прямоугольномъ треугольникѣ OCD будетъ

$$OD = a,\quad DC = b.$$

Затѣмъ строимъ гиперболу по точкамъ.

Задачи.

1. Какія геометрическія мѣста опредѣляютъ уравненія

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$$

$$9x^2 - 12xy + 5y^2 + 42x - 28y + 50 = 0$$

$$3x^2 - xy + y^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x^2 + 2xy - 2x + 2y - 3 = 0$$

$$x^2 - 2y^2 - 3x - 7y + 1 = 0$$

Отв. Точка, ничего, эллипсъ, двѣ пересѣкающіяся прямыя, гипербола.

2. Изслѣдовать кривую $x^2 - 2xy + 3y^2 - x - 1 = 0$.

Отв. Эллипсъ; координаты центра суть $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, сопряженные діаметры имѣютъ

уравненія $$l\left(x - y - \frac{1}{2}\right) + m\left(2y - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$2m\left(x - y - \frac{1}{2}\right) - l\left(2y - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Уравненія осей суть $$\sqrt{2}\left(x - y - \frac{1}{2}\right) + 2y - \frac{1}{2} = 0,$$

$$\sqrt{2}\left(x - y - \frac{1}{2}\right) - 2y + \frac{1}{2} = 0.$$

Длины полуосей суть $a = \frac{11}{8(2 - \sqrt{2})}$, $b = \frac{11}{8(2 + \sqrt{2})}$.

3. Изслѣдовать кривую $x^2 - 2xy - 3y^2 + 7x - 1 = 0$.

Отв. Гипербола; центръ $\left(-\frac{21}{8}, \frac{7}{8}\right)$; ассимптоты $x + y + \frac{7}{4} = 0$, $x - 3y + \frac{21}{4} = 0$; начало координатъ лежитъ на діаметрѣ, пересѣкающемъ гиперболу; дѣйствительная полуось гиперболы равна $\frac{163}{16(1+\sqrt{5})}$.

4. Написать общее уравненіе разносторонней гиперболы и найти длину ея дѣйствительной оси.

Отв. $A(x + y)(x - y) + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$,

$a = \pm \frac{P}{A(A^2 + B^2)^{3/2}}$, гдѣ $P = LN - M^2$, а $L = -A^2 - B^2$,

$$M = AE - BD, \quad N = AF - D^2.$$

5. Изслѣдовать гиперболу $xy - 3x + y - 1 = 0$.

Отв. Ассимптоты $x + 1 = 0$, $y - 3 = 0$; длина полуоси 2; гипербола равносторонняя.

Касательныя и свойства сопряженныхъ діаметровъ эллипса и гиперболы.

176. При изученіи свойствъ діаметровъ мы пересѣкали эллипсъ или гиперболу

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0$$

хордами

$$l\alpha + m\beta + n = 0,$$

причемъ мы видѣли, что каждая изъ этихъ хордъ имѣетъ двѣ точки пересѣченія съ кривою, опредѣляемыя уравненіями

$$\alpha = \frac{ln}{Lm^2 + l^2} \pm \sqrt{R_n}.$$

Если $R_n > 0$, то существуютъ двѣ различныя точки пересѣченія; при $R_n = 0$ сѣкущая обращается въ касательную.

177. **Задача**. Чрезъ точку (x_0, y_0), лежащую на линіи

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0 \qquad (1)$$

провести къ линіи касательную.

Координаты заданной точки x_0 и y_0, будучи подставлены въ функціи α и β, обращаютъ ихъ въ числа α_0 и β_0, причемъ эти числа удовлетворяютъ уравненію

$$L\alpha_0^2 + \beta_0^2 + P = 0; \tag{2}$$

Уравненіе хорды, проходящей черезъ точку α_0, β_0, можно написать такъ

$$l(\alpha - \alpha_0) + m(\beta - \beta_0) = 0, \tag{*}$$

измѣняя величины l и m, или, лучше сказать, ихъ отношеніе, будемъ получать различныя хорды, проходящія черезъ указанную точку.

Чтобы хорда проходила черезъ центръ эллипса, надо въ уравненіе (*) подставить $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и изъ полученнаго уравненія

$$l\alpha_0 + m\beta_0 = 0 \tag{**}$$

опредѣлить отношеніе этихъ коэффиціентовъ. Подберемъ теперь l и m такъ, чтобы другая точка пересѣченія хорды сливалась съ точкою α_0, β_0, тогда хорда будетъ касательною. Координаты другой точки опредѣлятся изъ двухъ уравненій (*) и (1). Вычитая изъ уравненія (1) уравненіе (2) получимъ

$$L(\alpha - \alpha_0)(\alpha + \alpha_0) + (\beta - \beta_0)(\beta + \beta_0) = 0. \tag{3}$$

Но, на основаніи уравненія (*), которое можно представить въ видѣ пропорціи

$$\frac{\alpha - \alpha_0}{m} = \frac{\beta - \beta_0}{-l},$$

уравненіе (3) обращается въ слѣдующее

$$Lm(\alpha + \alpha_0) - l(\beta + \beta_0) = 0. \tag{4}$$

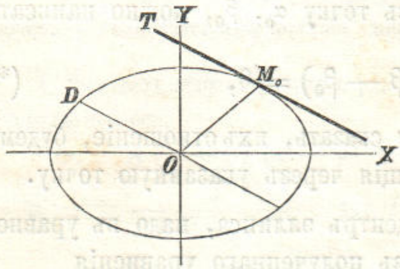
Касательной будетъ, очевидно, соотвѣтствовать такое отношеніе коэффиціентовъ l и m, которое получится изъ уравненія

$$2Lm\alpha_0 - 2l\beta_0 = 0,$$

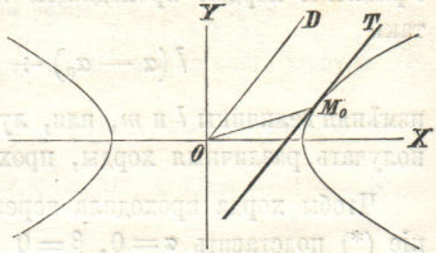
полученнаго изъ уравненія (4) замѣною α, β на α_0, β_0. Послѣднее уравненіе, переписанное въ такомъ видѣ

$$Lm\alpha_0 - l\beta_0 = 0, \tag{5}$$

показываетъ, что касательная въ точкѣ (α_0, β_0) параллельна діаметру сопряженному съ діаметромъ, проходящимъ черезъ эту точку, что очевидно изъ геометрическихъ соображеній (см. черт. 70 и 71). Окон-



Черт. 70.



Черт. 71.

чательное уравненіе касательной получимъ, исключая отношеніе коэффиціентовъ $\frac{l}{m}$ изъ двухъ уравненій (5) и (*)

$$L\alpha_0(\alpha-\alpha_0)+\beta_0(\beta-\beta_0)=0$$

$$L\alpha_0\alpha+\beta\beta_0-L\alpha_0^2-\beta_0^2=0.$$

Но, на основаніи уравненія (2), имѣемъ

$$-L\alpha_0^2-\beta_0^2=P,$$

слѣдовательно, окончательное уравненіе искомой касательной есть

$$L\alpha_0\alpha+\beta\beta_0+P=0.$$

178. **Задача**. Черезъ точку x_1, y_1, лежащую внѣ линіи

$$L\alpha^2+\beta^2+P=0, \tag{1}$$

провести касательную къ линіи.

Если назовемъ черезъ α_0, β_0 значеніе функцій α и β для точки касанія, то уравненіе касательной, какъ это мы видѣли, будетъ имѣть видъ

$$L\alpha\alpha_0+\beta\beta_0+P=0, \tag{*}$$

причемъ числа α_0 и β_0 должны удовлетворять уравненію

$$L\alpha_0^2+\beta_0^2+P=0. \tag{2}$$

Для того чтобы искомая касательная проходила черезъ заданную точку x_1, y_1, необходимо, чтобы координаты этой точки удовлетворяли уравненію (*), откуда, называя черезъ α_1, β_1 результатъ подстановки чиселъ x_1, y_1 въ функціи α, β, получимъ условіе

$$L\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1 + P = 0. \qquad (3)$$

Изъ условія (3) и уравненія (2) получимъ искомыя координаты точки касанія. Касательныхъ будетъ двѣ.

Итакъ, мы видимъ, что точки касанія искомыхъ касательныхъ получатся, какъ точки, въ которыхъ пересѣкаетъ кривую (1) нѣкоторая прямая

$$L\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + P = 0.$$

Послѣдняя прямая дѣйствительна для всякаго положенія точки x_1, y_1 и называется *полярою* этой точки; точка же, по отношенію къ своей полярѣ, называется *полюсомъ* (см. § 125).

Если выраженіе

$$L\alpha_1^2 + \beta_1^2 + P$$

имѣетъ знакъ противоположный знаку произведенія PL, то поляра пересѣкаетъ кривую въ двухъ точкахъ и, слѣдовательно, черезъ α_1, β_1 проходятъ двѣ касательныя; если

$$L\alpha_1^2 + \beta_1^2 + P = 0,$$

то точка лежитъ на кривой и только одна касательная проходитъ черезъ эту точку; наконецъ, когда знакъ

$$L\alpha_1^2 + \beta_1^2 + P$$

тотъ же, что у произведенія PL, то поляра не пересѣкаетъ кривую, точка α_1, β_1 лежитъ со стороны вогнутости кривой и черезъ эту точку нельзя провести ни одной касательной къ кривой.

179. **Задача**. Провести касательную къ кривой

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0 \qquad (1)$$

параллельно прямой

$$A_0x + B_0y + C_0 = 0. \qquad (2)$$

Пишемъ уравненіе (2) въ видѣ

$$l\alpha + m\beta + n = 0,$$

и опредѣляемъ n подъ тѣмъ условіемъ, чтобы $R_n = 0$; получимъ двѣ касательныя

$$l\alpha + m\beta \pm \sqrt{-P\left(m^2 + \frac{l^2}{L}\right)} = 0.$$

Если $L > 0$, $P < 0$, то задача всегда возможна; если же $L < 0$, то все зависитъ отъ знака P.

При $P > 0$ надо брать $m < \frac{l}{\sqrt{-L}}$, а при $P < 0$ надо брать $m > \frac{l}{\sqrt{-L}}$.

180. Возьмемъ теперь уравненіе эллипса и гиперболы въ простѣйшемъ видѣ

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Уравненія поляры точки x_1, y_1 будетъ

$$\frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Если точка x_1, y_1 лежитъ на заданной кривой, тогда уравненіе поляры обращается въ уравненіе касательной.

181. *Подкасательною* въ точкѣ M нѣкоторой кривой линіи называется разстояніе между основаніемъ ординаты точки M на оси x-овъ и точкою, въ которой пересѣкаетъ эту ось касательная, проведенная къ кривой черезъ точку M.

Разсмотримъ подкасательную эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Пусть уравненіе заданное опредѣляетъ эллипсъ AMS (см. черт. 72).

Уравненіе касательной MT къ эллипсу, въ точкѣ $M\,(x_1, y_1)$, будетъ, какъ мы видѣли,

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Подкасательная

$$PT = OT - OP = OT - x_1,$$

но OT есть абсцисса той точки, въ которой касательная пересѣкаетъ ось x-овъ. Полагая въ уравненіи этой касательной $y = O$, а $x = OT$, получимъ

$$\frac{x_1 OT}{a^2} = 1,$$

откуда

$$OT = \frac{a^2}{x_1}.$$

Подкасательная

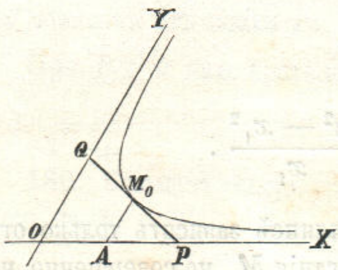
$$PT = \frac{a^2}{x_1} - x_1 = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}.$$

Мы видимъ, что подкасательная въ эллипсѣ зависитъ только отъ большой оси a и отъ абсциссы x точки касанія M, но совершенно не зависитъ отъ малой оси, поэтому, для точекъ, имѣющихъ одну и ту же абсциссу на разныхъ эллипсахъ, построенныхъ на большой оси, касательная пересѣкаетъ большую ось въ одной и той же точкѣ T (см. черт. 72). Отсюда выводимъ слѣдующее правило построенія касательной. Изъ центра эллипса радіусомъ равнымъ большой оси эллипса AMS чертимъ кругъ AM_1S_1. Этотъ кругъ можно разсматривать какъ частный случай эллипса съ большою осью $= a$, малая ось котораго b увеличилась и сдѣлалась равною a. Если намъ надо провести касательную къ эллипсу S въ нѣкоторой его точкѣ M, абсцисса которой есть OT, то мы можемъ поступить такъ: продолжаемъ ординату до пересѣченія съ кругомъ M_1S_1; получаемъ на кругѣ точку M_1, строимъ въ этой точкѣ M_1 касательную M_1T къ кругу; эта касательная пересѣкаетъ большую ось эллипса (ось x-овъ) въ нѣкоторой точкѣ T. На основаніи доказаннаго, мы замѣчаемъ, что если соединимъ точку M эллипса MS съ точкою T, то получимъ искомую касательную MT къ эллипсу въ точкѣ M.

Черт. 72.

182. Въ заключеніе разсмотримъ гиперболу, отнесенную къ ассимптотамъ. Уравненіе гиперболы будетъ $xy = k^2$ (1) (см. § 170). Возьмемъ на этой гиперболѣ точку M_0 (см. черт. 73), координаты ко-

торой $x_0 = OA$, $y_0 = AM_0$, причемъ эти координаты удовлетворяютъ очевидно уравненію $x_0 y_0 = k^2$. Требуется провести касательную въ точкѣ M_0 къ гиперболѣ. Уравненіе (1) можно написать въ такомъ видѣ



Черт. 73.

$$-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + k^2 = 0,$$

это уравненіе имѣетъ видъ

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0,$$

гдѣ

$$L = -1,\ \alpha = \frac{x+y}{2},\ \beta = \frac{x-y}{2},\ P = k^2,$$

отсюда, очевидно, уравненіе касательной въ точкѣ M_0 будетъ имѣть видъ

$$-\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\frac{x_0-y_0}{2}\right) = -k^2.$$

Послѣднее уравненіе послѣ приличныхъ сокращеній обращается въ такое

$$xy_0 + yx_0 = 2k^2. \tag{2}$$

Найдемъ точку P, въ которой касательная пересѣкаетъ ось x-овъ; для этой цѣли положимъ въ уравненіи (2) $y = 0$, тогда абсцисса x точки P будетъ

$$x = \frac{2k^2}{y_0} = \frac{2x_0 y_0}{y_0} = 2x_0,$$

что даетъ простой способъ построенія касательной

$$OP = 2x_0 = 2OA.$$

183. Уравненіе гиперболы съ ассимптотами $\alpha = 0$, $\beta = 0$ имѣетъ видъ $\alpha\beta = k^2$. На основаніи разсужденій, тождественныхъ съ приведенными въ предыдущемъ параграфѣ, мы замѣтимъ, что уравненіе поляры точки α_0, β_0 будетъ имѣть видъ

$$\alpha\beta_0 + \beta\alpha_0 = 2k^2$$

Задачи.

1. Провести касательную изъ начала координатъ къ кривымъ

$x^2-2xy+y-1=0,\ 3x^2-12xy+13y^2+6x-10y+3=0.$

Отв. Поляры начала суть $y-2=0$, $3x-5y+3=0$.

2. Черезъ точку (1, 1) провести касательную къ кривой

$$x^2+xy+2y^2+3x+y+1=0.$$

Отв. Касательныя имѣютъ уравненія $x-y=0$, $y=1$.

3. Провести касательныя изъ начала координатъ къ кривымъ

$$2x^2-2xy+y^2-7=0,\ x^2-xy+6=0.$$

Отв. Мнимыя касательныя; $x.(x-y)=0$, т. е. ассимптоты, касающіяся кривой въ безконечно далекой точкѣ.

4. Провести къ кривой $x^2+2xy+5y^2-2x-6y=0$ касательную параллельно прямой $x+3y-2=0$.

Отв. $x+3y=0$, $x+3y-4=0$.

184. Мы видѣли уже, что для эллипса или гиперболы, опредѣляемыхъ уравненіемъ

$$L\alpha^2+\beta^2+P=0,$$

уравненія пары сопряженныхъ діаметровъ имѣютъ видъ

$$l\alpha+m\beta=0 \quad Lm\alpha-l\beta=0.$$

Будемъ разсматривать теперь уравненіе эллипса и гиперболы отнесенное къ осямъ

$$\pm\frac{b^2}{a^2}\ x^2+y^2\mp b^2=0,$$

гдѣ знакъ $+$ соотвѣтствуетъ случаю эллипса, а знакъ $-$ случаю гиперболы.

Въ данномъ случаѣ

$$L=\pm\frac{b^2}{a^2},\ \alpha=x,\ \beta=y,\ P=\mp b^2.$$

Примѣняя къ этому случаю общую теорію, мы получимъ уравненія двухъ сопряженныхъ діаметровъ въ такомъ видѣ

$$(1)\qquad lx+my=0,\quad \pm\frac{b^2}{a^2}\ mx-ly=0; \qquad (2)$$

обозначая углы, составляемые съ осью x-овъ діаметрами (1) и (2), через φ и ψ, получимъ

$$tg\,\varphi = -\frac{l}{m},\ tg\,\psi = \pm\frac{b^2}{a^2}\,\frac{m}{l}.$$

Перемножая, получимъ

$$tg\,\varphi.\ tg\,\psi = \mp\frac{b^2}{a^2}.$$

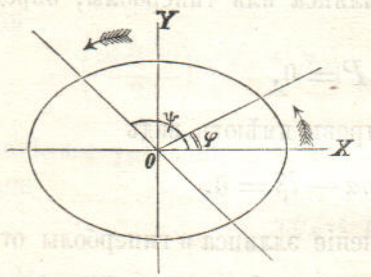
Верхній знакъ соотвѣтствуетъ эллипсу, а нижній гиперболѣ.

185. Разсмотримъ сначала случай эллипса (см. черт. 74). Уравненіе

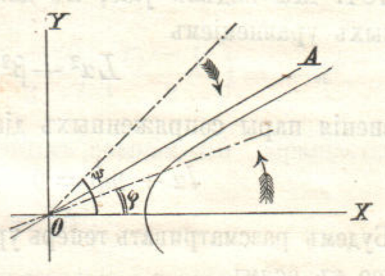
$$tang\,\varphi\ tang\,\psi = -\frac{b^2}{a^2}$$

показываетъ, что $tang\,\varphi$ и $tang\,\psi$ разныхъ знаковъ.

Отсюда мы заключаемъ, что, если уголъ φ меньше 90°, то уголъ $\psi > 90^\circ$, такъ что сопряженные діаметры лежатъ въ разныхъ углахъ



Черт. 74.



Черт. 75.

между осями. Когда уголъ $\varphi = 0$, тогда одинъ изъ сопряженныхъ діаметровъ совпадаетъ съ осью x-овъ, а другой образуетъ съ этой осью такой уголъ ψ, что

$$tang\,\psi = -\frac{b^2}{tg\ 0.\ a^2} = \infty,$$

откуда $\psi = 90^\circ$, что очевидно.

Если мы будемъ поворачивать діаметръ, совпадающій съ осью x-овъ въ сторону положительныхъ угловъ, тогда діаметръ съ нимъ сопряженный будетъ поворачиваться въ ту-же сторону, начиная съ положенія совпадающаго съ осью y-овъ. Когда, послѣ оборота на 90°, первый изъ діаметровъ совпадетъ съ осью y-овъ, тогда второй діаметръ, повернувшись на 90°, совпадетъ съ осью x-овъ.

186. Совсѣмъ другое происходитъ при гиперболѣ (см. черт. 75).

Уравненіе

$$tang\,\varphi .\ tang\,\psi = + \frac{b^2}{a^2}$$

показываетъ, что $tang\,\varphi$ и $tang\,\psi$ одинаковыхъ знаковъ. Оба угла φ и ψ меньше или больше 90°, что показываетъ, что оба сопряженныхъ діаметра лежатъ въ одной парѣ вертикальныхъ угловъ, составляемыхъ осями гиперболы.

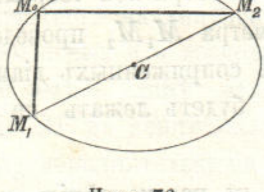
Въ томъ случаѣ, когда одинъ діаметръ совпадаетъ съ одною осью, другой непремѣнно будетъ совпадать съ другою осью гиперболы. Будемъ теперь поворачивать одинъ діаметръ въ сторону положительныхъ угловъ, начиная съ положенія, совпадающаго съ осью x-овъ, тогда другой діаметръ, сопряженный съ первымъ, будетъ поворачиваться въ обратномъ направленіи. Оба сопряженные діаметра будутъ сближаться, пока не совпадутъ съ одною изъ ассимптотъ. Въ самомъ дѣлѣ, если $\varphi = \psi$, то

$$tang^2\,\varphi = + \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{а, слѣдовательно,} \quad tang\,\varphi = \pm \frac{b}{a},$$

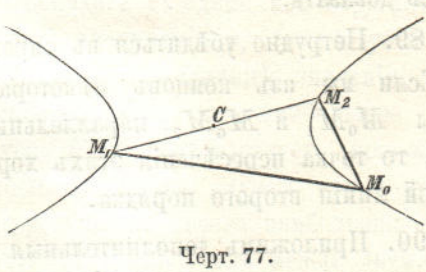
что показываетъ справедливость сказаннаго.

Въ эллипсѣ уголъ между сопряженными діаметрами не можетъ быть менѣе нѣкотораго предѣльнаго угла. Чтобы это показать, введемъ въ разсмотрѣніе дополнительныя хорды.

187. *Дополнительными хордами* называются хорды, идущія отъ нѣкоторой точки на кривой къ концамъ одного и того же діаметра.



Черт. 76.



Черт. 77.

Возьмемъ какую нибудь произвольную точку M_0 на кривой второго порядка и произвольный діаметръ M_1M_2; тогда, если мы соединимъ точку M_0 съ концами этого діаметра, то получимъ двѣ дополнительныя хорды M_0M_1 и M_0M_2 (см. черт. 76 и 77).

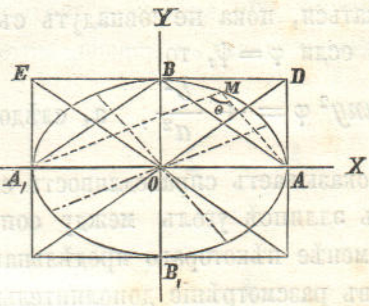
188. Относительно дополнительныхъ хордъ можно высказать слѣдующую теорему.

Теорема. Дополнительныя хорды параллельны двумъ сопряженнымъ діаметрамъ.

Въ кругѣ дополнительныя хорды взаимно перпендикулярны и приведенная теорема есть не что иное, какъ обобщеніе этого свойства круга на линіи второго порядка.

Пусть заданы дополнительныя хорды M_0M_1 и M_0M_2. Проведемъ діаметръ CE, дѣлящій хорду M_0M_1 пополамъ (см. черт. 78); этотъ діаметръ параллеленъ хордѣ M_0M_2, ибо дѣлитъ пополамъ двѣ стороны M_0M_1 и M_0M_2 треугольника $M_0M_1M_2$ и, слѣдовательно, онъ параллеленъ третьей сторонѣ этого треугольника. То же самое мы скажемъ о діаметрѣ CD дѣлящемъ хорду M_0M_2 пополамъ, а именно, что этотъ діаметръ параллеленъ хордѣ M_0M_1. Изъ сказаннаго мы заключаемъ, что оба діаметра CE и CD сопряженные, что и требовалось доказать.

Черт. 78.



Черт. 79.

189. Нетрудно убѣдиться въ справедливости обратной теоремы.

Если мы изъ концовъ нѣкотораго діаметра M_1M_2 проведемъ хорды M_0M_1 и M_0M_2, параллельныя парѣ сопряженныхъ діаметровъ, то точка пересѣченія этихъ хордъ M_0 будетъ лежать на заданной линіи второго порядка.

190. Приложимъ дополнительныя хорды къ разсмотрѣнію угла между двумя сопряженными діаметрами эллипса.

Вмѣсто угла между сопряженными діаметрами мы имѣемъ право разсматривать равный ему уголъ между двумя хордами MA и MA', проведенными черезъ концы большой оси AA', параллельно двумъ сопряженнымъ діаметрамъ (см. черт. 79). Разные углы θ между сопряженными діаметрами мы будемъ получать, мѣняя положеніе точки M на контурѣ эллипса

$$\theta = \angle AMA' = \angle MAX - \angle MA'X,$$

откуда

$$tang\,\theta = \frac{tang \angle MAX - tang \angle MA'X}{1 + tang \angle MAX . tg \angle MA'X} =$$

$$= \frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x+a}}{1 + \frac{y^2}{x^2-a^2}},$$

ибо

$$tang \angle MAX = \frac{y}{x-a}; \quad tang \angle MA'X = \frac{y}{x+a},$$

отсюда

$$tang\,\theta = \frac{2ay}{x^2+y^2-a^2};$$

исключая изъ послѣдней формулы x на основаніи уравненія эллипса, получимъ окончательно

$$tang\,\theta = -\frac{2ab^2}{(a^2-b^2)\,y}.$$

Если точка M будетъ описывать верхнюю половину AMA' эллипса, то уголъ θ будетъ тупой, ибо его тангенсъ отрицательный. При $y=0$, т. е. когда точка M совпадетъ съ одной изъ вершинъ A, уголъ θ—прямой, затѣмъ, по мѣрѣ увеличенія y, $tang\,\theta$ убываетъ и достигаетъ наименьшаго по абсолютной величинѣ значенія, при наибольшемъ изъ возможныхъ значеній y-ка. Это наибольшее значеніе y-ка = длинѣ малой полуоси b и соотвѣтствуетъ положенію точки M въ концѣ малой полуоси. Въ этомъ случаѣ тупой уголъ между дополнительными хордами достигаетъ своего наибольшаго значенія ABA'. Итакъ, мы видимъ, что тупой уголъ между двумя сопряженными діаметрами достигаетъ своего maximum'а и, слѣдовательно, острый уголъ между тѣми же діаметрами своего minimum'а для двухъ діаметровъ $\overline{OD}$ и $\overline{OE}$, параллельныхъ хордамъ, проведеннымъ черезъ концы малой оси къ концамъ большой. Получаемые этимъ путемъ діаметры по длинѣ равны между собой, что слѣдуетъ изъ полной симметричности ихъ положенія относительно осей. Равные сопряженные діаметры суть діагонали прямоугольника, построеннаго на осяхъ.

191. Приведенныя выше общія уравненія пары сопряженныхъ діаметровъ могутъ быть приведены къ такому виду

$$\beta = -\frac{l}{m}\alpha,\ \beta = \frac{Lm}{l}\alpha,$$

откуда, обозначая $-\frac{l}{m} = \lambda$, $\frac{Lm}{l} = \mu$, получимъ уравненія сопряженныхъ діаметровъ въ видѣ

$$\beta - \lambda\alpha = 0,\ \beta - \mu\alpha = 0, \tag{*}$$

причемъ

$$\lambda\mu = -\frac{l}{m}\cdot\frac{Lm}{l} = -L. \tag{**}$$

Послѣднее условіе (**) между параметрами пучковъ (*) показываетъ, что двѣ системы сопряженныхъ діаметровъ составляютъ инволюцію (см. § 78).

Если $L > 0$, то инволюція будетъ безъ двойныхъ элементовъ или, какъ иногда говорятъ, эллиптическая, какъ соотвѣтствующая діаметрамъ эллипса; если же $L < 0$, то инволюція будетъ гиперболическая, соотвѣтствующая діаметрамъ гиперболы, причемъ двойными элементами будутъ ассимптоты.

192. Ассимптоты гиперболы представляютъ своею совокупностью нѣкоторую кривую второго порядка, имѣющую ту же систему сопряженныхъ діаметровъ, что и любая гипербола, имѣющая ихъ своими ассимптотами. Это слѣдуетъ аналитически изъ того, что уравненія сопряженныхъ діаметровъ не зависятъ отъ коэффиціента P уравненія

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0,$$

и, слѣдовательно, тѣ же сопряженные діаметры будутъ при P не $= 0$, что и въ случаѣ $P = 0$, дающемъ ассимптоты.

193. Какъ слѣдствіе изъ разсужденій § 192 мы получимъ весьма важное правило для построенія сколько угодно точекъ одной и той же гиперболы, если задана одна точка и ассимптоты.

Проводимъ черезъ заданную точку сѣкущую. На этой сѣкущей ассимптоты образуютъ двѣ точки. Обѣ точки сѣченія сѣкущей съ гиперболой должны лежать на равныхъ разстояніяхъ отъ соотвѣтственныхъ точекъ сѣченія съ ассимптотами. Это слѣдуетъ изъ того, что средины отрѣзковъ, образующихся на сѣкущей гиперболою и ассимптотами, совпадаютъ, ибо лежатъ на діаметрѣ, сопряженномъ съ діаметромъ параллельнымъ разсматриваемой сѣкущей, а этотъ діаметръ одинъ и тотъ же для гиперболы, что и для ассимптотъ.

194. Какъ частный случай эллиптической инволюціи мы замѣтимъ такъ называемую круговую инволюцію, представляющую систему сопряженныхъ діаметровъ

круга. Отличительное свойство этой инволюціи состоитъ въ томъ, что каждая пара сопряженныхъ діаметровъ представляетъ двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя.

195. Всякую инволюцію двухъ пучковъ $\beta - \lambda\alpha = 0$, $\beta - \mu\alpha = 0$ (1) можно разсматривать, какъ систему сопряженныхъ діаметровъ нѣкоторой линіи 2-го порядка.

Пусть, въ самомъ дѣлѣ, инволюція (1) опредѣляется уравненіемъ

$$\mathfrak{A}\lambda\mu + \mathfrak{B}(\lambda + \mu) + \mathfrak{C} = 0. \tag{2}$$

Найдемъ соотвѣтствующее коническое сѣченіе. Перемѣною начальныхъ элементовъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$ заставимъ пропасть въ уравненіи (2) коэффиціентъ $\mathfrak{B}$. Положимъ

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda', \ \mu = \mu_0 + \mu',$$

тогда получимъ

$$\mathfrak{A}\lambda'\mu' + \lambda'(\mathfrak{B} + \mu_0\mathfrak{A}) + \mu'(\mathfrak{B} + \lambda_0\mathfrak{A}) + \mathfrak{C} + \mathfrak{B}(\lambda_0 + \mu_0) + \mathfrak{A}\lambda_0\mu_0 = 0,$$

отсюда, полагая

$$\lambda_0 = \mu_0 = -\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}},$$

получимъ

$$\lambda'\mu' = -\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A}^2} = -L.$$

Итакъ, мы видимъ, что уравненія

$$\beta + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\alpha - \lambda'\alpha = 0, \ \beta + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\alpha - \mu'\alpha = 0,$$

при $\lambda'\mu' = -L$, опредѣляютъ сопряженные діаметра линіи втораго порядка

$$L\alpha^2 + \left(\beta + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\alpha\right)^2 + P = 0$$

(см. § 191), или окончательно

$$\mathfrak{A}\beta^2 + 2\mathfrak{B}\alpha\beta + \mathfrak{C}\alpha^2 + P_1 = 0,$$

гдѣ

$$P_1 = \mathfrak{A}^2 P.$$

196. На основаніи соображеній § 146, мы замѣчаемъ, что, если возьмемъ за оси координатъ пару сопряженныхъ діаметровъ, то уравненіе эллипса можетъ быть приведено къ виду

$$\frac{x^2}{a_1^{\,2}} + \frac{y^2}{b_1^{\,2}} = 1,$$

гдѣ a_1 и b_1 суть не что иное, какъ длины полудіаметровъ, принятыхъ за оси.

Подобнымъ образомъ уравненіе гиперболы приведется къ виду

$$\frac{x^2}{a_1{}^2} - \frac{y^2}{b_1{}^2} = 1,$$

гдѣ a_1 и b_1 также полудіаметры, причемъ a_1 есть разстояніе отъ центра до конца діаметра, пересѣкающаго, а b_1—разстояніе отъ центра до точки, гдѣ другой діаметръ пересѣкаютъ гиперболу сопряженную.

197. Покажемъ замѣчательную зависимость между числами a_1, b_1, съ одной стороны, и полуосями a, b съ другой.

Представивъ уравненія эллипса и гиперболы въ видѣ

$$\pm\left[\frac{x}{a}\right]^2 + \left[\frac{y}{b}\right]^2 \mp 1 = 0,$$

гдѣ $$L = \pm 1,\ \ \alpha = \frac{x}{a},\ \beta = \frac{y}{b},\ \ P = \mp 1,$$

получимъ уравненія сопряженныхъ діаметровъ въ видѣ

$$l\,\frac{x}{a} + m\,\frac{y}{b} = 0,\ \pm m\,\frac{x}{a} - l\,\frac{y}{b} = 0,$$

или, полагая $\frac{l}{m} = \lambda$, получимъ такія уравненія

$$\lambda\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \quad \pm\frac{x}{a} - \lambda\,\frac{y}{b} = 0.$$

Остановимся сначала на случаѣ эллипса

$$\lambda\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{x}{a} - \lambda\frac{y}{b} = 0. \tag{2}$$

Разстояніе до центра точки x_1, y_1, въ которой діаметръ (1) пересѣкаетъ эллипсъ, есть a_1

$$a_1{}^2 = x_1{}^2 + y^2{}_1 = x_1{}^2 + \frac{b^2}{a^2}\,(a^2 - x_1{}^2) = b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}\,x_1{}^2.$$

Остается найти x_1. Изъ уравненія (1) получимъ

$$\frac{y_1}{b} = -\lambda\,\frac{x_1}{a}.$$

Подставляя въ уравненіе эллипса, получимъ

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \lambda^2\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 = 1, \quad x_1{}^2 = \frac{a^2}{1+\lambda^2}.$$

Получаемъ

$$a_1{}^2 = b^2 + \frac{a^2 - b^2}{1+\lambda^2} = \frac{a^2+\lambda^2 b^2}{1+\lambda^2}. \tag{3}$$

Подобнымъ образомъ, называя черезъ b_1 разстояніе отъ центра до точки (x_2, y_2), въ которой пересѣкаетъ эллипсъ другой діаметръ (2), получимъ

$$b_1{}^2 = x_2{}^2 + y_2{}^2 = b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}\ x_2{}^2.$$

Но, на основаніи уравненія (2),

$$\frac{y_2}{b} = \frac{1}{\lambda}\ \frac{x_2}{a};$$

отсюда

$$\frac{x_2{}^2}{a^2} + \frac{1}{\lambda^2}\ \frac{x_2{}^2}{a^2} = 1$$

и, наконецъ,

$$x_2{}^2 = \frac{\lambda^2 a^2}{1+\lambda^2}.$$

Окончательно получаемъ

$$b_1{}^2 = b^2 + \frac{(a^2 - b^2)\lambda^2}{1+\lambda^2} = \frac{\lambda^2 a^2 + b^2}{1+\lambda^2}. \tag{4}$$

Складывая равенства (3) и (4), получаемъ

$$a_1{}^2 + b_1{}^2 = \frac{a^2 + \lambda^2 b^2 + a^2\lambda^2 + b^2}{1+\lambda^2} = a^2 + b^2.$$

Послѣднее равенство выражаетъ теорему.

Теорема. Сумма квадратовъ двухъ сопряженныхъ полудіаметровъ эллипса есть величина постоянная, равная суммѣ квадратовъ полуосей.

198. Найдемъ уголъ между двумя сопряженными діаметрами. Обозначимъ черезъ φ и ψ углы, составленные діаметрами (1) и (2)

съ осью x-овъ, тогда будемъ имѣть

$$tg\varphi = -\lambda \frac{b}{a}, \quad tg\psi = +\frac{1}{\lambda}\frac{b}{a}$$

$$tg(\psi - \varphi) = \frac{\frac{1}{\lambda}\frac{b}{a} + \frac{\lambda b}{a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{ab(1+\lambda^2)}{\lambda(a^2 - b^2)}$$

$$sin(\psi - \varphi) = \frac{ab(1+\lambda^2)}{\sqrt{(a^2+\lambda^2 b^2)(a^2\lambda^2+b^2)}}.$$

Отсюда мы замѣчаемъ, что

$$a_1 b_1 sin(\psi - \varphi) = \sqrt{\frac{a^2+\lambda^2 b^2}{1+\lambda^2}}\sqrt{\frac{a^2\lambda^2+b^2}{1+\lambda^2}}\frac{ab(1+\lambda^2)}{\sqrt{(a^2+\lambda^2 b^2)(a^2\lambda^2+b^2)}} = ab.$$

Послѣднее равенство выражаетъ теорему.

Теорема. Площадь параллелограма, составленнаго полудіаметрами a_1, b_1, въ эллипсѣ, есть величина постоянная, равная площади прямоугольника, составленнаго полуосями.

Теоремы послѣднихъ двухъ параграфовъ принадлежатъ знаменитому александрійскому геометру Аполлонію.

Аналогичныя теоремы имѣютъ мѣсто и для гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$(1) \quad \lambda\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0. \qquad (2) \quad \frac{x}{a} + \lambda\frac{y}{b} = 0.$$

$$x_1^2 = \frac{a^2}{1-\lambda^2}, \quad a_1^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}x_1^2 - b^2 = \frac{a^2+\lambda^2 b^2}{1-\lambda^2}.$$

Для сопряженной гиперболы получимъ

$$x_2^2 = \frac{a^2\lambda^2}{1-\lambda^2}, \quad b_1^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}\lambda^2 + b^2 = \frac{a^2\lambda^2+b^2}{1-\lambda^2}.$$

Вычитая, получимъ

$$a_1^2 - b_1^2 = \frac{a^2+\lambda^2 b^2 - a^2\lambda^2 - b^2}{1-\lambda^2} = a^2 - b^2,$$

что даетъ теорему.

Теорема. Разность квадратовъ полудіаметровъ есть для гиперболы величина постоянная, равная разности квадратовъ полуосей.

Подобнымъ образомъ найдемъ уголъ между двумя сопряженными діаметрами

$$tg(\psi - \varphi) = \frac{ab(1-\lambda^2)}{\lambda(a^2+b^2)},$$

откуда

$$a_1 b_1 \sin(\psi - \varphi) = ab.$$

Теорема. Параллелограмъ, построенный на полудіаметрахъ равенъ по площади прямоугольнику построенному на полуосяхъ.

199. Уголъ между двумя сопряженными діаметрами мѣняется для эллипса въ зависимости отъ измѣненія $\frac{1+\lambda^2}{\lambda}$, а для гиперболы въ зависимости отъ $\frac{1-\lambda^2}{\lambda}$. Для всѣхъ положительныхъ значенію λ выраженіе

$$\frac{1+\lambda^2}{\lambda} > 2, \text{ ибо } \frac{1+\lambda^2}{\lambda} - 2 = \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda} > 0$$

и, слѣдовательно, имѣетъ наименьшее значеніе равное 2 при $\lambda = 1$. И такъ, мы видимъ, что въ эллипсѣ два діаметра

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$$

составляютъ наименьшій острый уголъ, что мы уже видѣли.

Для гиперболы выраженіе $\frac{1-\lambda^2}{\lambda}$ для положительныхъ λ не имѣетъ minimum'а и можетъ мѣняться отъ $+\infty$ до $-\infty$. Оно обращается въ 0 при $\lambda = +1$ $\lambda = -1$, что даетъ ассимптоты.

200. Въ эллипсѣ при $\lambda = 1$ получаются равные сопряженные діаметры, ибо тогда

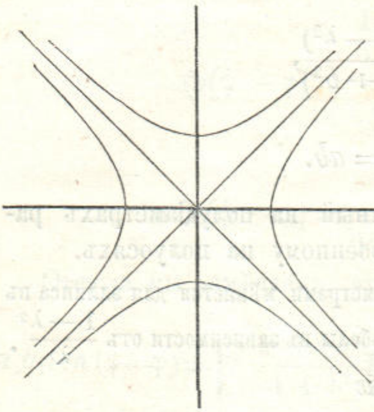
$$a_1{}^2 = \frac{a^2+b^2}{2}, \; b_1{}^2 = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Въ гиперболѣ равныхъ сопряженныхъ діаметровъ или совсѣмъ нѣтъ, или же всѣ сопряженные діаметры равны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, равенство

$$a_1{}^2 - b_1{}^2 = a^2 - b^2$$

показываетъ что a_1 можетъ равняться b_1 лишь въ томъ случаѣ, если $a = b$.

Если послѣднее условіе имѣетъ мѣсто, то гипербола называется *равностороннею* и всѣ ея сопряженные діаметры равны между собою, что слѣдуетъ изъ приведеннаго равенства.



Черт. 80.

Уравненіе равносторонней гиперболы будетъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1,$$

или

$$x^2-y^2=a^2\ .$$

Равносторонняя гипербола занимаетъ такое же мѣсто по отношенію къ разносторонней, какое кругъ занимаетъ по отношенію къ эллипсу.

Равносторонняя гипербола имѣетъ взаимно - перпендикулярныя ассимптоты и поворотомъ на 90° вокругъ центра можетъ быть совмѣщена съ гиперболою съ ней сопряженною (см. черт. 80)

$$y^2-x^2=a^2$$

Фокусы и директрисы.

201. Для каждой кривой второго порядка всегда существуетъ на плоскости нѣкоторая точка, обладающая тѣмъ свойствомъ, что разстояніе отъ нея каждой точки кривой выражается цѣлою раціональною функціею координатъ послѣдней. Такая точка называется фокусомъ кривой.

202. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ намъ дана кривая самымъ общимъ уравненіемъ (A)

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0\ .\ \ .\ \ .\ (A)$$

Если назовемъ неизвѣстныя координаты фокуса F черезъ α и β и возьмемъ на кривой какую либо точку $M\ (x,\ y)$, то разстояніе MF должно выражаться въ видѣ линейной функціи отъ координатъ x и y точки M, т. е. въ видѣ: $lx+my+n$, гдѣ l, m и n суть нѣкоторыя числа. Съ другой стороны, мы знаемъ, что разстояніе MF, какъ разстояніе между двумя точками, выражается такъ:

$$+\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2},$$

слѣдовательно,

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=lx+my+n,$$

или

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(lx+my+n)^2,$$

или, наконецъ,

$$x^2(1-l^2)-2lmxy+y^2(1-m^2)-2x(\alpha+ln)-$$
$$-2y(\beta+mn)+(\alpha^2+\beta^2-n^2)=0.$$

Такъ какъ въ этомъ уравненіи x и y суть координаты произвольной точки кривой, заданной уравненіемъ (A), то оно должно удовлетворяться одновременно съ уравненіемъ (A), т. е. оно должно быть равносильно съ уравненіемъ (A), а потому ихъ коэффиціенты должны быть препорціональны

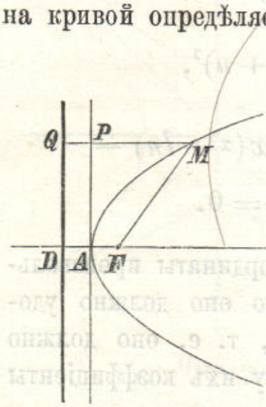
$$\frac{A}{1-l^2}=\frac{B}{-lm}=\frac{C}{1-m^2}=\frac{D}{-(\alpha+ln)}=\frac{E}{-(\beta+mn)}=\frac{F}{\alpha^2+\beta^2-n^2}.$$

Послѣднее равенство шести дробей даетъ, вообще говоря, пять различныхъ уравненій, изъ которыхъ возможно всегда опредѣлить величины α, β, l, m и n по коэффиціентамъ уравненія (A), и тогда разстояніе каждой точки кривой отъ фокуса будетъ равно $lx+my+n$, гдѣ l, m и n будутъ уже величины вполнѣ извѣстныя. Если это выраженіе разстоянія отъ фокуса приравняемъ нулю, то, очевидно, получимъ уравненіе нѣкоторой прямой $lx+my+n=0$, которая называется *директрисой*.

203. Показавъ существованіе фокуса и возможность его отысканія въ общемъ случаѣ кривой второго порядка, для болѣе подробнаго изученія свойствъ фокусовъ и директрисъ обратимся къ упрощеннымъ уравненіямъ различныхъ видовъ кривыхъ второго порядка.

204. Предварительно сдѣлаемъ одно замѣчаніе, которое въ значительной мѣрѣ упрощаетъ нахожденіе фокуса. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе кривыхъ 2 го порядка въ простѣйшемъ видѣ не содержитъ коэффиціента при произведеніи координатъ, другими словами $B=0$. Отсюда замѣчаемъ, что должно быть $lm=0$, откуда или $l=0$, или

$m=0$. Если мы будемъ за ось x-овъ выбирать одну изъ осей симметріи, какъ мы это дѣлали при разсмотрѣніи эллипса, гиперболы и параболы, то придется ограничиться случаемъ $m=0$, ибо случай $l=0$ не даетъ вещественныхъ рѣшеній. Другими словами, можно будетъ фокусъ опредѣлить какъ точку, разстояніе которой отъ точки на кривой опредѣляется линейно черезъ абсциссу x послѣдней точки.



Черт. 81.

205. Начнемъ съ параболы (см. черт. 81). Мы уже видѣли, что уравненіе параболы, отнесенной къ оси симметріи и касательной въ вершинѣ приводится къ такому простому виду: $y^2=2px$.

Если назовемъ координаты искомаго фокуса черезъ α и β, то разстояніе до фокуса всякой точки M, взятой на параболѣ, выразится такъ

$$R=+\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2},$$

слѣдовательно,

$$R^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2.$$

Такъ какъ для всякой точки параболы $y=\pm\sqrt{2px}$, то

$$R^2=(x-\alpha)^2+[\pm\sqrt{2px}-\beta]^2=x^2+2(p-\alpha)x+\alpha^2\mp$$
$$\mp 2\beta\sqrt{2px}+\beta^2.$$

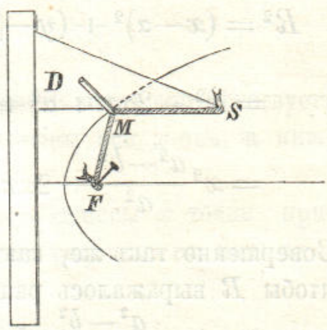
Такъ какъ разстояніе до фокуса должно выражаться раціонально черезъ координату x, то подавно квадратъ этого разстоянія долженъ быть раціоналенъ, а это возможно лишь при условіи $\beta=0$. Тогда $R^2=x^2+2(p-\alpha)x+\alpha^2$. Чтобы R было функціей раціональной, необходимо, чтобы $x^2+2(p-\alpha)x+\alpha^2$ было полнымъ квадратомъ; необходимое условіе этого состоитъ въ томъ, чтобы $(p-\alpha)^2=\alpha^2$ или $p-\alpha=\alpha$, $\alpha=\frac{p}{2}$. Итакъ, мы нашли координаты фокуса параболы $\alpha=\frac{p}{2}$ и $\beta=0$, слѣдовательно, фокусъ лежитъ на оси симметріи параболы отъ вершины ея въ разстояніи равномъ полупараметру $\frac{p}{2}$. Вставивъ найденныя координаты фокуса въ выраженіе R, найдемъ выраженіе для разстоянія любой точки параболы отъ фокуса въ такомъ видѣ

$$R=+\sqrt{x^2+2\left(p-\frac{p}{2}\right)x+\frac{p^2}{4}}=x+\frac{p}{2}.$$

206. Если приравняемъ полученное выраженіе нулю, то получимъ уравненіе директрисы $x+\frac{p}{2}=0$, или $x=-\frac{p}{2}$. Изъ этого уравненія видно, что директриса есть прямая, параллельная оси y-овъ и отстоящая отъ нея на разстояніи $\frac{p}{2}$, но только въ другую сторону отъ фокуса, такъ что вершина дѣлитъ разстояніе фокуса отъ директрисы пополамъ. На чертежѣ 81 директриса означена буквами DQ. Изъ уравненія директрисы мы видимъ, что разстояніе любой точки параболы отъ нея будетъ равно $x+\frac{p}{2}$. Сравнивая это выраженіе съ выраженіемъ разстоянія точки до фокуса, приходимъ къ такой теоремѣ:

Теорема. Парабола есть геометрическое мѣсто точекъ, разстояніе которыхъ до фокуса равно разстоянію до директрисы. На нашемъ чертежѣ $MF=MQ$.

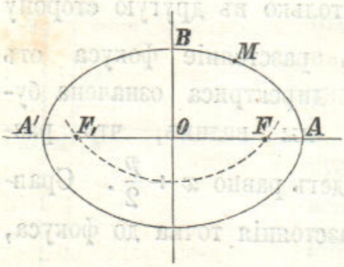
207. Высказанная теорема даетъ возможность чертить параболу непрерывнымъ движеніемъ. Если требуется начертить параболу по фокусу F и директрисѣ D (см. черт. 82), то поступаютъ такимъ образомъ: прикладываютъ линейку къ директрисѣ, къ ней прикладываютъ однимъ катетомъ треугольникъ такъ, чтобы другой катетъ шелъ параллельно оси параболы; затѣмъ укрѣпляютъ нить въ фокусѣ F и, пропустивъ ее около острія карандаша, поставленнаго въ точкѣ M, принадлежащей параболѣ, другой конецъ укрѣпляютъ на треугольникѣ въ точкѣ S; если теперь, удерживая карандашъ постоянно около треугольника и натягивая имъ нить, будемъ передвигать треугольникъ по линейкѣ, то остріе карандаша будетъ вычерчивать параболу. Въ самомъ дѣлѣ, при началѣ карандашъ устанавливается такъ, что $MF=MD$, слѣдовательно $MS+MF=MS+MD=DS$,



Черт. 82.

т. е. длина нити равна длинѣ катета. При всякомъ новомъ положеніи карандаша M, длина нити $MS =$ части длины катета MS, или $MF = MD$, т. е. точка M всегда остается въ равномъ разстояніи отъ фокуса и директрисы и, слѣдовательно, всегда остается на параболѣ.

208. Перейдемъ теперь къ отысканію положенія и свойствъ фокуса для эллипса (см. черт. 83). Уравненіе эллипса будемъ разсматривать въ видѣ



Черт. 83.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (*),$$

къ которому оно приводится, какъ мы уже знаемъ, если за оси координатъ принять оси эллипса. Если искомыя координаты фокуса назовемъ черезъ α и β, то разстояніе каждой точки $M\ (x, y)$ на эллипсѣ отъ фокуса выразится такъ: $R = \pm\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$, или $R^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$. Изъ уравненія (*) найдемъ для каждой точки эллипса $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, слѣдовательно,

$$R^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (x-\alpha)^2 + \left(\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} - \beta\right)^2 =$$

$$= x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \mp 2\beta\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} + \beta^2 =$$

$$= x^2\frac{a^2 - b^2}{a^2} - 2\alpha x + (\alpha^2 + b^2) \mp 2\beta\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} + \beta^2 .$$

Совершенно такъ же, какъ и для параболы, на основаніи требованія, чтобы R выражалось раціонально черезъ абсциссу точки M, найдемъ $\beta = 0$ и $\frac{a^2 - b^2}{a^2}(\alpha^2 + b^2) = \alpha^2$, откуда $\alpha = \pm\sqrt{a^2 - b^2} = \pm c$. Итакъ, для эллипса существуютъ два фокуса F и F_1, которые оба лежатъ на большой оси симметрично по обѣ стороны отъ центра, на разстояніи $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

209. Такъ какъ, очевидно, $\sqrt{a^2 - b^2} < a$, то, слѣдовательно, оба фокуса лежатъ внутри очертанія эллипса. Если изъ вершины эллипса B, соотвѣтствующей малой оси, опишемъ окружность радіусомъ равнымъ

большой полуоси, то она пересѣчетъ большую ось въ двухъ точкахъ F и F_1, которыя и суть искомые фокусы; въ самомъ дѣлѣ, изъ прямоугольнаго треугольника BFO, гдѣ гипотенуза $BF = a$ и катетъ $BO = b$, найдемъ

$$OF = + \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Разстояніе отъ центра до фокуса называется *линейнымъ эксцентриситетомъ* эллипса, но обыкновенно вводится въ разсмотрѣніе, такъ называемый, *астрономическій* эксцентриситетъ e, который представляетъ отношеніе линейнаго эксцентриситета c къ длинѣ большой полуоси a.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1.$$

210. Вставивъ найденныя значенія координатъ фокуса $\alpha = \pm c$, $\beta = 0$ въ выраженіе R^2, квадрата разстоянія точки M до фокуса, получимъ его въ такомъ видѣ:

$$R^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + b^2) =$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 \mp 2\sqrt{a^2 - b^2}.x + a^2 = e^2x^2 \mp 2aex + a^2,$$

откуда

$$R = \pm (a \mp ex).$$

Внутри скобокъ послѣдней формулы верхній знакъ соотвѣтствуетъ фокусу F, лежащему съ положительной стороны оси x-овъ, а нижній знакъ другому фокусу F_1.

Такъ какъ $e < 1$, абсолютная величина абсциссы x точки, принадлежащей эллипсу меньше a, то абсолютная величина ex меньше a, а потому въ формулѣ

$$R = \pm (a \mp ex)$$

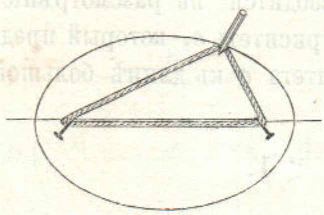
передъ скобками надо взять знакъ $+$, чтобы R выходило положительнымъ, какъ это по существу и должно быть.

Итакъ, мы видимъ, что для каждой точки эллипса разстояніе R до фокуса F будетъ выражаться формулою $a - ex$, а разстояніе R_1 до другого фокуса F_1 формулою $a + ex$. Отсюда очевидно, что,

$$R + R_1 = 2a.$$

Итакъ, для каждой точки эллипса сумма разстояній до фокусовъ, или сумма, такъ называемыхъ, радіусовъ векторовъ есть величина постоянная, равная $2a$.

211. Это свойство эллипса можетъ быть положено въ основу его опредѣленія, какъ геометрическаго мѣста точекъ, сумма разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ есть величина постоянная и даетъ возможность чертить эллипсъ непрерывнымъ движеніемъ. Для этого слѣдуетъ взять нить длиною равною требуемой длинѣ большой оси, укрѣпить концы ея въ фокусахъ и, натянувъ остріемъ карандаша нить, передвигать карандашъ такъ, чтобы онъ скользилъ по нити, постоянно ее натягивая: остріе карандаша при этомъ будетъ вычерчивать эллипсъ. Можно поступать еще такъ, какъ показано на чертежѣ 84. Взять нить длиною $2c + 2a$; укрѣпить въ фокусахъ двѣ булавки и накинуть на нихъ нить, связанную концами, тогда натянувъ нить остріемъ карандаша можемъ начертить эллипсъ, двигая карандашъ вокругъ фокусовъ.



Черт. 84.

212. Если приравняемъ нулю выраженія радіусовъ векторовъ, то получимъ уравненія директрисъ. Въ эллипсѣ будетъ двѣ директрисы, соотвѣтственно двумъ фокусамъ: фокусу F будетъ соотвѣтствовать директриса $a - ex = 0$, или $x = \frac{a}{e}$, а фокусу F_1 будетъ соотвѣтствовать директриса $a + ex = 0$ или $x = -\frac{a}{e}$. Изъ этихъ уравненій видно, что директрисы суть прямыя, параллельныя малой оси и, слѣдовательно, перпендикулярныя къ большой. Далѣе, такъ какъ e для эллипса < 1, то $\frac{a}{e} > a$, слѣдовательно, директрисы пересѣкаютъ только продолженіе большой оси и находятся внѣ очертанія эллипса. Очевидно, также, что директрисы расположены симметрично по обѣ стороны отъ центра на равныхъ разстояніяхъ. Если даны оси эллипса, то построеніе директрисъ можно сдѣлать такимъ образомъ (см. черт. 85): на большой оси, какъ на діаметрѣ, опишемъ окружность, изъ фокуса F возставимъ перпендикуляръ FP, до пересѣченія съ окружностью и въ точкѣ P проведемъ къ описанному кругу касательную: точка D ея пересѣченія съ большой осью опредѣлитъ положеніе директрисы MN.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ прямоугольнаго треугольника OPD найдемъ:

$$OP^2 = OD.\,OF,$$

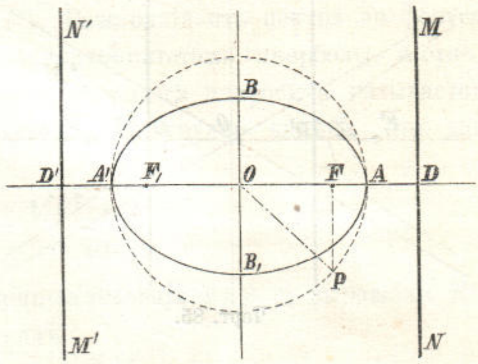
или

$$a^2 = OD\sqrt{a^2 - b^2},$$

откуда

$$OD = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{a}{e},$$

что и требовалось доказать. Другая директриса $M'N'$ будетъ лежать по другую сторону центра на разстояніи $OD' = OD$.



Черт. 85.

213. Мы нашли уравненія директрисъ

$$x \mp \frac{a}{e} = 0$$

поэтому для всякой точки, взятой на эллипсѣ, разстояніе до директрисы будетъ

$$d = \pm\left(x \mp \frac{a}{e}\right).$$

Чтобы это разстояніе выражалось положительной величиной, необходимо эту формулу переписать въ такомъ видѣ

$$d = \frac{a \mp ex}{e}.$$

Разстояніе же той же самой точки до соотвѣтственнаго фокуса будетъ:

$$R = a \mp ex,$$

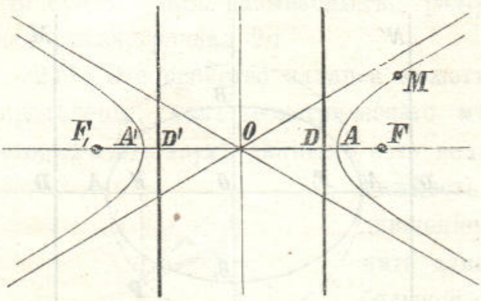
слѣдовательно, для каждой точки эллипса отношеніе

$$\frac{R}{d} = e = const.$$

Отсюда вытекаетъ опредѣленіе эллипса: эллипсъ есть геометрическое мѣсто точекъ, отношеніе разстояній которыхъ отъ нѣкоторой данной точки F и данной прямой D, есть величина постоянная, меньшая единицы.

214. Намъ остается теперь разсмотрѣть свойства директрисъ и фо-

кусовъ гиперболы (см. черт. 86). Уравненіе гиперболы, отнесенное къ осямъ симметріи, имѣетъ видъ



Черт. 85.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (*)$$

Если назовемъ неизвѣстныя координаты фокуса черезъ α и β, то квадратъ растоянія каждой точки M, взятой на гиперболѣ, до фокуса выразится такъ

$$R^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2,$$

или, подставляя на основаніи уравненія (*) вмѣсто y равную ему величину

$$\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

$$R^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=$$

$$=x^2\frac{a^2+b^2}{a^2}-2\alpha x+(\alpha^2-b^2)\mp 2\beta\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}+\beta^2.$$

Такъ какъ R должно быть раціональной функціей отъ x, то

$$\beta=0 \text{ и } x^2\frac{a^2+b^2}{a^2}-2\alpha x+(\alpha^2-b^2)$$

должно представлять полный квадратъ, т. е.

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}(\alpha^2-b^2)=\alpha^2,$$

откуда

$$\alpha=\pm\sqrt{a^2+b^2}=\pm c.$$

Итакъ, фокусовъ у каждой гиперболы два; они лежатъ на ея дѣйствительной оси, симметрично относительно центра: абсцисса одного $=+\sqrt{a^2+b^2}=c$, а другого $=-\sqrt{a^2+b^2}=-c$. Такъ какъ, очевидно, $\sqrt{a^2+b^2}$ по обсолютной величинѣ $>a$, то, слѣдовательно, оба фокуса лежатъ на оси далѣе вершинъ A и A_1 отъ центра, внутри очертанія гиперболы. Полученныя выраженія для координатъ фокусовъ гиперболы можно было бы предвидѣть и не производя приведенныхъ выкладокъ, по сравненію съ эллипсомъ, принявъ во вниманіе, что уравненіе гиперболы отличается отъ уравненія эллипса только тѣмъ, что здѣсь вмѣсто $(+b^2)$ стоитъ $(-b^2)$. Разстояніе отъ центра до фокуса $c = OF$ называется *линейнымъ* эксцентриситетомъ гиперболы, а отношеніе e линейнаго эксцентриситета къ длинѣ полуоси a называется *астрономическимъ* эксцентриситетомъ. Не трудно видѣть, что для гиперболы

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1.$$

215. Если подставимъ найденныя значенія α и β въ выраженіе R^2, то представимъ его въ такомъ видѣ

$$R^2 = x^2 \frac{a^2+b^2}{a^2} \pm 2x\sqrt{a^2+b^2} + a^2 = e^2x^2 \pm 2aex + a^2,$$

откуда

$$R = \pm(ex \pm a).$$

Знакъ — въ скобкахъ будетъ соотвѣтствовать разстоянію до фукуса F лежащаго съ положительной стороны оси x-овъ и знакъ $+$ будетъ соотвѣтствовать разстоянію до фокуса F_1. Знакъ же передъ скобками нужно выбирать такъ, чтобы для R получалось значеніе положительное. Замѣтимъ, что для точекъ гиперболы x по абсолютной величинѣ всегда $> a$ и $e > 1$, слѣдовательно, ex, по абсолютной величинѣ, всегда $> a$. Если возьмемъ точку на правой вѣтви гиперболы, для которой x всегда положительно и $> a$, то выраженія $(ex - a)$ и $(ex + a)$ будутъ положительны и потому передъ скобками возьмемъ знакъ $+$. Если же возьмемъ точку на лѣвой вѣтви гиперболы, для которой $x < 0$, то $(ex - a)$ и $(ex + a)$ будутъ величины отрицательныя и потому передъ скобками надо взять знакъ минусъ.

Итакъ, если назовемъ разстояніе до фокуса F черезъ R и до фокуса F_1 черезъ R_1, то

$$R = \pm(ex - a) \text{ и } R_1 = \pm(ex + a),$$

причемъ $+$ передъ скобками нужно брать для точекъ, лежащихъ на правой вѣтви гиперболы, а — для точекъ, лежащихъ на лѣвой вѣтви ея. Отсюда не трудно видѣть, что для всѣхъ точекъ гиперболы

$$R_1 - R = \pm 2a;$$

для правой вѣтви

$$R_1 - R = + 2a,$$

а для лѣвой

$$R_1 - R = - 2a,$$

т. е.

$$R - R_1 = 2a.$$

Отсюда вытекаетъ такая теорема: гипербола есть геометрическое мѣсто точекъ, разность разстояній которыхъ отъ фокусовъ F и F_1 равняется постоянной величинѣ, длинѣ дѣйствительной оси гиперболы.

216. Если приравняемъ нулю выраженіе разстоянія точки гиперболы до фокуса, то получимъ уравненіе директрисы. У гиперболы будетъ двѣ директрисы; фокусу F соотвѣтствуетъ директриса D

$$ex - a = 0, \text{ или } x = \frac{a}{e};$$

фокусу F_1—директриса D_1,

$$ex + a = 0, \text{ или } x = -\frac{a}{e}.$$

Изъ этихъ уравненій видно, что директрисы перпендикулярны къ дѣйствительной оси гиперболы и лежатъ по обѣ стороны отъ центра въ разстояніи $\frac{a}{e}$. Такъ какъ $e > 1$, то $\frac{a}{e} < a$, и мы заключаемъ, что директрисы пересѣкаютъ ось внѣ очертанія гиперболы. По извѣстнымъ уже намъ формуламъ, разстояніе каждой точки гиперболы до фокуса F будетъ

$$r = \pm(ex - a),$$

а до директрисы D, соотвѣтствующей фокусу F, будетъ

$$d = \pm\left(\frac{ex - a}{e}\right),$$

слѣдовательно, $\frac{r}{d}$ = постоянной величинѣ $= e > 1$. Слѣдовательно, гиперболу можно еще опредѣлить, какъ геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ нѣкоторой точки, называемой фокусомъ, и отъ нѣкоторой прямой, называемой директрисой находятся между собою въ постоянномъ отношеніи, $e > 1$.

217. **Задача**. По данному очертанію гиперболы, найти ея фокусы и директрисы (черт. 87).

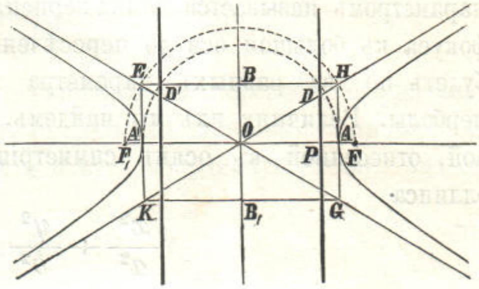
Строимъ на осяхъ AA' и BB' прямоугольникъ $EHGK$, діагонали котораго суть ассимптоты гиперболы KH и EG.

Если изъ центра O радіусомъ равнымъ $OF = OH$ проведемъ окружность, то она пересѣчетъ ось симметріи въ точкахъ F и F_1, которыя и будутъ фокусами, ибо абсциссы ихъ OF и OF_1, равныя между собою, по абсолютной величинѣ равны

$$OH = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Остается найти директрисы. Уравненіе директрисы, соотвѣтствующей фокусу F, будетъ $ex - a = o$ или

$$x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}, \text{ гдѣ } c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Черт. 87.

Если изъ центра O радіусомъ OA опишемъ окружность, то она пересѣчетъ ассимптоту OH въ точкѣ D, которая принадлежитъ директрисѣ, ибо абсцисса ея OP, на основаніи подобія треугольниковъ ODP и OAH, удовлетворяетъ слѣдующей пропорціи

$$\frac{OP}{OD} = \frac{OA}{OH} \text{ или } \frac{OP}{a} = \frac{a}{c},$$

откуда

$$OP = \frac{a^2}{c},$$

что и требовалось доказать. Другая-же директриса D' будетъ лежать по другую сторону отъ центра въ равномъ разстояніи.

Уравненія кривыхъ второго порядка, отнесенныя къ вершинѣ и къ оси симметріи и свойства ихъ касательныхъ.

218. Выберемъ за ось x-овъ ось симметріи кривой, а за ось y-овъ касательную въ вершинѣ и притомъ такъ, чтобы кривая расположилась по правую сторону отъ послѣдней. Но предварительно введемъ понятіе о параметрахъ кривыхъ второго порядка, которое даетъ возможность придать преобразованнымъ уравненіямъ болѣе простой и симметричный видъ. Мы уже видѣли, что въ параболѣ пара-

метръ p есть не что иное, какъ длина перпендикуляра, возстановленнаго изъ фокуса до пересѣченія съ кривою, иначе говоря, это есть ордината фокуса.

Въ самомъ дѣлѣ, положивъ въ уравненіи параболы $y^2 = 2px$, $x = \frac{p}{2}$, получимъ $y = \pm p$. По аналогіи и въ эллипсѣ и въ гиперболѣ параметромъ называется длина перпендикуляра, возстановленнаго изъ фокуса къ большой оси до пересѣченія съ кривой. Здѣсь, очевидно, будетъ по два равныхъ параметра какъ у эллипса, такъ и у гиперболы. Величину ихъ мы найдемъ, положивъ въ уравненіи кривой, отнесенной къ осямъ симметріи, $x = \pm c$. Если въ уравненіи эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

положимъ

$$x = \pm\sqrt{a^2 - b^2},$$

то получимъ

$$y = \pm \frac{b^2}{a},$$

такъ что

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Для гиперболы, положивъ въ уравненіи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \ x = \pm\sqrt{a^2 + b^2},$$

найдемъ

$$y = \pm \frac{b^2}{a},$$

откуда параметръ будетъ равенъ $\frac{b^2}{a}$, Итакъ, мы видимъ, что въ гиперболѣ, а равно и въ эллипсѣ, малая полуось есть средняя пропорціональная между параметромъ и большой полуосью, и параметръ $p = \frac{b^2}{a}$.

219. Приступимъ теперь къ преобразованію уравненія кривыхъ второго порядка къ оси симметріи и касательной въ вершинѣ. Для

параболы мы уже имѣемъ преобразованное такимъ образомъ уравненіе: $y^2 = 2px$. Остается преобразовать уравненіе эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Такъ какъ здѣсь преобразованіе ограничивается перенесеніемъ начала, безъ измѣненія направленія осей, то формулы преобразованія будутъ: $x = a + x'$ и $y = b + y'$, гдѣ a и b суть координаты новаго начала относительно старой системы.

Преобразуемъ уравненіе эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

полагая $x = -a + x'$ и $y = y'$, получимъ

$$\frac{(-a + x')^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,\ y'^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x' - \frac{b^2}{a^2}\,x'^2,$$

или, замѣняя $\frac{b^2}{a}$ черезъ p, получимъ $y'^2 = 2px' - \frac{p}{a}\,x'^2$.

Точно также для гиперболы найдемъ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x = a + x',\ y = y',\ \frac{(a + x')^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

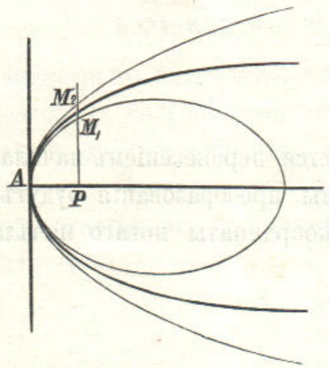
$$y'^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x' + \frac{b^2}{a^2}\,x'^2,\ y'^2 = 2px' + \frac{p}{a}\,x'^2.$$

Въ случаѣ эллипса мы переносимъ начало координатъ въ вершину, лежащую съ отрицательной стороны оси x-овъ, а при гиперболѣ въ вершину, лежащую съ положительной стороны оси x-овъ.

Сравнивая полученныя уравненія:

$$y^2 = 2px,\ y^2 = 2px + \frac{p}{a}\,x^2 \text{ и } y^2 = 2px - \frac{p}{a}\,x^2,$$

мы замѣчаемъ, что если возьмемъ параболу, эллипсъ и гиперболу съ однимъ и тѣмъ-же параметромъ p, то увидимъ, что, при одной и той-же абсциссѣ, ординаты гиперболы будутъ наибольшія, а эллипса—наименьшія, а у параболы онѣ будутъ имѣть среднее значеніе, и, слѣдовательно, эллипсъ всѣми своими точками будетъ лежать внутри параболы, а гипербола—внѣ ея (черт. 88). Далѣе, если, оставляя ту-же величину параметра p_1, будемъ безпредѣльно увеличивать большую ось a, то добавочные члены

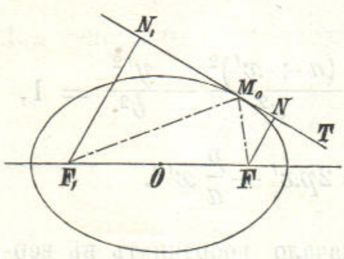


Черт. 88.

$$-\frac{p}{a}x^2 \text{ и } +\frac{p}{a}x^2,$$

которыми уравненія эллипса и гиперболы отличаются отъ уравненія параболы, будутъ безпредѣльно уменьшаться и въ предѣлѣ обратятся въ нуль; тогда уравненія эллипса и гиперболы сдѣлаются тожественными съ уравненіемъ параболы, и самыя кривыя сольются. Слѣдовательно, параболу можно разсматривать какъ предѣльное положеніе, къ которому стремятся эллипсъ и гипербола, если, при постоянномъ параметрѣ p, большая ихъ ось безпредѣльно возрастаетъ.

220. Въ эллипсѣ касательная составляетъ одинаковые углы съ радіусами векторами, проведенными изъ фокусовъ къ точкѣ касанія.



Черт. 89.

Возьмемъ на эллипсѣ точку M_0 (x_0, y_0) и проведемъ въ этой точкѣ касательную къ эллипсу (см. черт. 89)

$$\frac{\xi x_0}{a^2}+\frac{\eta y_0}{b^2}-1=0. \qquad (1)$$

Опускаемъ на касательную (1) изъ фокусовъ F и F_1 перпендикуляры, тогда получимъ:

$$\sin FM_0N=\frac{FN}{FM_0},\ \sin\ F_1M_0N_1=\frac{F_1N_1}{F_1M_0};$$

на основаніи извѣстнаго уже

$$FM_0=a-ex_0,\ F_1M_0=a+ex_0$$

Остается найти FN и F_1N_1, т. е. разстоянія фокусовъ до касательной.

Разстояніе FN найдемъ, какъ разстояніе точки F ($\xi = +c$, $\eta = 0$) отъ прямой (1); это разстояніе будетъ:

$$FN = \frac{\frac{cx_0}{a^2} - 1}{-\sqrt{\frac{x_0^{\,2}}{a^4} + \frac{y_0^{\,2}}{b^4}}} = \frac{1}{a \,.\, R} \,.\, (a - ex_0),$$

гдѣ

$$R = \sqrt{\frac{x_0^{\,2}}{a^4} + \frac{y_0^{\,2}}{b^4}}.$$

Подобнымъ-же образомъ разстояніе другого фокуса F_1 до касательной (1) опредѣлится, какъ разстояніе отъ точки F_1 ($\xi = -c$, $\eta = 0$):

$$F_1N_1 = \frac{\frac{-cx_0}{a^2} - 1}{-R} = \frac{1}{aR}\,(a + ex_0)$$

и, наконецъ,

$$sin\, FM_0N = \frac{FN}{FM_0} = \frac{a - ex_0}{aR} \,.\, \frac{1}{a - ex_0} = \frac{1}{aR}$$

$$sin\, F_1M_0N_1 = \frac{F_1N_1}{F_1M_0} = \frac{a + ex_0}{aR} \,.\, \frac{1}{a + ex_0} = \frac{1}{aR}$$

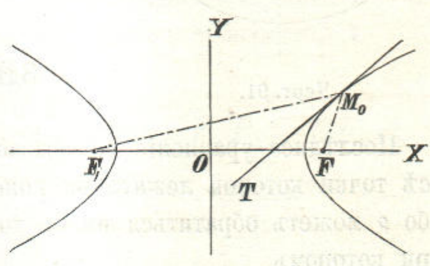
отсюда

$$sin\, FM_0N = sin\, F_1M_0N_1$$

и, наконецъ,

$$\angle\ FM_0N = \angle\ F_1M_0N_1,$$

что и требовалось доказать.



Черт. 90.

Для гиперболы будетъ существовать аналогичное свойство, а именно: касательная M_0T въ точкѣ M_0 гиперболы (см. черт. 90) дѣлитъ пополамъ уголъ FM_0F_1, составляемый радіусами векторами M_0F и F_1M_0, проведенными къ точкѣ касанія изъ фокусовъ.

Доказательство то-же, что и для эллипса. Для параболы фокусъ F_1 лежитъ на безконечности, и прямая M_0F_1 параллельна оси x-овъ.

Уравненіе кривыхъ второго порядка въ полярныхъ координатахъ.

221. Выведенныя уже нами выраженія радіусовъ-векторовъ, т. е. выраженія разстоянія любой точки на кривой отъ фокуса черезъ абсциссу точки даютъ возможность легко написать уравненія кривыхъ второго порядка въ полярныхъ координатахъ, принимая за полюсъ одинъ изъ фокусовъ, а за полярную ось ось симметріи въ направленіи отъ фокуса къ ближайшей вершинѣ. Положительное значеніе угла φ будемъ откладывать въ сторону положительныхъ y-овъ.

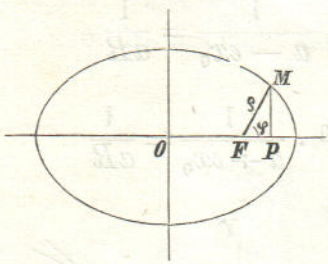
222. Преобразуемъ уравненіе эллипса, принимая за полюсъ тотъ фокусъ F, который имѣетъ положительную абсциссу $+c$ (см. черт. 91).

$$MF=\rho=a-ex,\ x=OP=OF+FP=\sqrt{a^2-b^2}+\rho\cos\varphi$$

$$\rho=a-e\,(ae+\rho\cos\varphi),\ \rho\,(1+e\cos\varphi)=a\,(1-e^2),$$

но, принимая во вниманіе, что

$$a(1-e^2)=a\left[1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\right]=\frac{b^2}{a}=p,$$



Черт. 91.

получимъ окончательно полярное уравненіе эллипса въ такомъ видѣ

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\varphi}.$$

Здѣсь e есть эксцентриситетъ эллипса и $e<1$.

Послѣднее уравненіе показываетъ, что эллипсъ есть кривая линія, всѣ точки которой лежатъ на конечномъ разстояніи отъ фокуса F, ибо ρ можетъ обратиться въ ∞ только для такого значенія угла φ, при которомъ

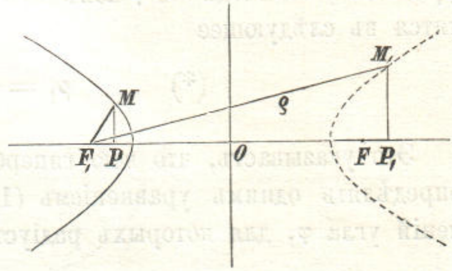
$$1+e\cos\varphi=0,$$

или

$$\cos\varphi=-\frac{1}{e},$$

но число $\frac{1}{e}$ больше единицы, а потому нѣтъ такого угла φ, при которомъ $\cos\varphi$ болѣе единицы по численной величинѣ.

223. Подобнымъ образомъ возьмемъ у гиперболы за полюсъ фокусъ F_1, имѣющій абсциссу $-c$.



Черт. 92.

$$\rho = \pm (ex + a),$$

причемъ $+$ будетъ для правой вѣтви и $-$ для лѣвой (см. черт. 92). Разсмотримъ оба случая отдѣльно.

Для лѣвой вѣтви

$$\rho = MF_1 = -ex - a,$$

но

$$x = -OP = F_1P - OF_1 = \rho\cos\varphi - \sqrt{a^2 + b^2} = \rho\cos\varphi - ae,$$

слѣдовательно,

$$\rho = -e(\rho\cos\varphi - ae) - a,$$

отсюда

$$\rho(1 + e\cos\varphi) = a(e^2 - 1) = a\left[\frac{a^2 + b^2}{a^2} - 1\right] = \frac{b^2}{a} = p,$$

откуда получимъ уравненіе для правой вѣтви

$$(1) \qquad \rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

которое имѣетъ видъ тождественной съ уравненіемъ эллипса и отличается отъ послѣдняго только тѣмъ, что для гиперболы $e > 1$.

Для правой вѣтви мы получимъ

$$\rho = M_1F_1 = +(ex + a),\ x = +OP_1 = F_1P_1 - OF_1 =$$
$$= \rho\cos\varphi - \sqrt{a^2 + b^2},$$

отсюда

$$\rho = c(\rho\cos\varphi - ae) + a,\ \rho(1 - e\cos\varphi) = a(1 - e^2) = -\frac{b^2}{a} = -p,$$

откуда получимъ уравненіе правой вѣтви

$$(2) \qquad \rho = \frac{-p}{1 - e\cos\varphi}.$$

Въ уравненіяхъ (1) и (2) мы число ρ, какъ выражающее разстояніе двухъ точекъ, считаемъ положительнымъ.

224. Уравненіе (2) предыдущаго параграфа сдѣлается тождественнымъ съ уравненіемъ (1), если мы измѣнимъ ρ на $-\rho_1$, а φ на $\varphi_1 + 180^\circ$, ибо тогда $\cos\varphi$ измѣнитъ свой знакъ, и уравненіе (2) обратится въ слѣдующее

$$(*) \qquad \rho_1 = \frac{p}{1 + e\cos\varphi_1}.$$

Это указываетъ, что всю гиперболу, то есть обѣ ея вѣтви, можно опредѣлять однимъ уравненіемъ (1), условившись для такихъ значеній угла φ, для которыхъ радіусъ

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

дѣлается отрицательнымъ, его откладывать не въ направленіи, указываемомъ угломъ φ, а въ обратномъ.

225. Замѣчаніе предыдущаго параграфа весьма важно при разсмотрѣніи кривыхъ линій при помощи полярныхъ координатъ. Введеніемъ въ разсмотрѣніе отрицательныхъ радіусовъ-векторовъ съ тѣмъ условіемъ, о которомъ мы уже сказали, постоянно пользуются при изученіи кривыхъ линій для достиженія единства формулъ.

226. Итакъ, мы видимъ, что гипербола опредѣляется тѣмъ же полярнымъ уравненіемъ, что и эллипсъ. Безконечно далекія точки гиперболы мы получимъ, если положимъ

$$1 + e\cos\varphi = 0,\ \cos\varphi = -\frac{1}{e} = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

причемъ уголъ φ соотвѣтствуетъ ассимптотамъ.

227. Мы видѣли уже, что параболу можно разсматривать, какъ предѣльное положеніе, къ которому стремится эллипсъ, у котораго параметръ p остается безъ перемѣны, большая же ось безпредѣльно увеличивается. При этомъ увеличеніи большой оси эксцентриситетъ стремится къ единицѣ; въ самомъ дѣлѣ,

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{p}{a}},$$

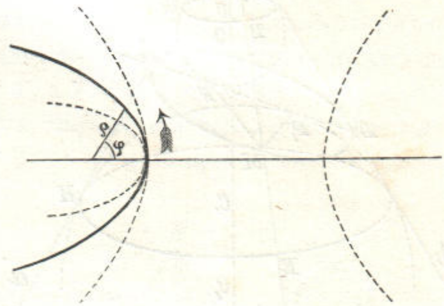
откуда

$$\lim\left\{e\right\}_{a=\infty}=\lim\left\{\sqrt{1-\frac{p}{a}}\right\}_{a=\infty}=1.$$

Отсюда мы заключаемъ, что можемъ полярное уравненіе параболы получить изъ уравненія эллипса замѣною e на единицу:

$$\rho=\frac{p}{1+\cos\varphi}.$$

При этомъ не надо забывать, что направленіе полярной оси выбирается отъ фокуса къ вершинѣ параболы (см. черт. 93).



Черт. 93.

228. Резюмируя сказанное, мы видимъ, что всѣ три кривыя второго порядка имѣютъ общее уравненіе

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\varphi},$$

чѣмъ съ успѣхомъ пользуются въ астрономіи, почему и величина e получила названіе астрономическаго эксцентриситета. Для параболы $e=1$, для эллипса $e<1$ и для гиперболы $e>1$.

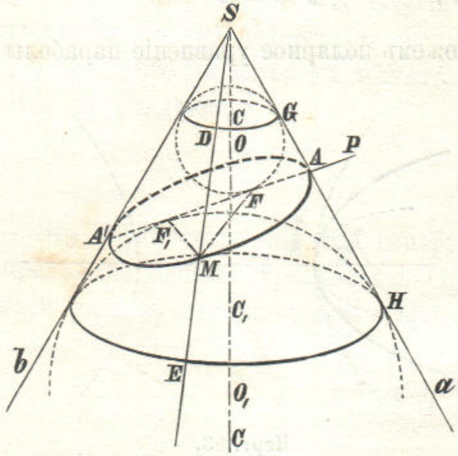
Кривыя второго порядка, разсматриваемыя, какъ сѣченія конуса плоскостью.

229. Всѣ кривыя линіи второго порядка могутъ быть получены пересѣченіемъ поверхности прямого кругового конуса плоскостями, различно наклоненными къ его оси.

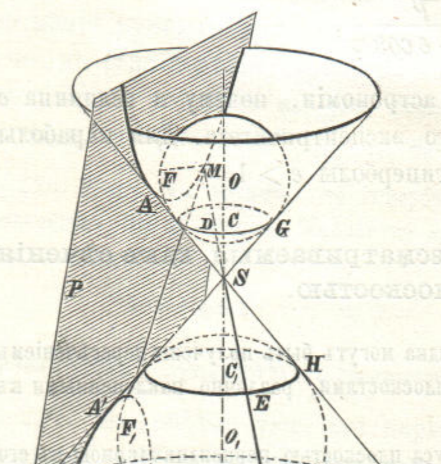
230. Если пересѣчь поверхность конуса плоскостью перпендикулярною къ его оси, то въ сѣченіи получится *кругъ*.

231. Если сѣкущая плоскость наклонена къ оси подъ нѣкоторымъ угломъ, большимъ угла, составляемаго образующей конуса съ осью, то въ сѣченіи получится *эллипсъ*. Въ самомъ дѣлѣ, пусть Sa и Sb (черт. 94) суть прямыя пересѣченія конуса съ плоскостью чертежа и Sc пусть его ось. Пересѣчемъ конусъ нѣкоторою плоскостью, перпендикулярною къ плоскости чертежа; эта плоскость дастъ въ сѣченіи съ конусомъ нѣкоторую замкнутую кривую. Линія пересѣченія плос-

кости P съ плоскостью чертежа пусть будетъ AA', при этомъ мы предположимъ, что уголъ между прямыми AA' и Sc больше угла aSc. Впишемъ въ треугольникъ SAA' круги, имѣющіе центры O и O_1 на оси конуса. Это будутъ линіи сѣченія съ плоскостью чертежа двухъ шаровъ, касающихся поверхности конуса по кругамъ GD и EH, имѣющимъ центры въ точкахъ C и C_1 и касающихся плоскости сѣченія въ точкахъ F и F_1. Возьмемъ на кривой сѣченія точку M и проведемъ черезъ нее образующую конуса SM; эта образующая, очевидно, будетъ касательною къ шарамъ O и O_1 въ точкахъ D и E. Соединимъ точку M съ точками F и F_1; прямыя MF и MF_1, очевидно, суть касательныя къ шарамъ O и O_1, и такъ какъ длины касательныхъ, проведенныхъ къ шару изъ нѣкоторой точки, всѣ равны между собою, то $MF = MD$ и $MF_1 = ME$, слѣдовательно, $MF + MF_1 = DE = GH$. Итакъ, полученная нами линія сѣченія обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что для каждой точки ея сумма разстояній отъ двухъ точекъ F и F_1 есть величина постоянная GH, слѣдовательно, это—эллипсъ и AA_1— его большая ось, а точки F и F_1 суть его фокусы.



Черт. 94.

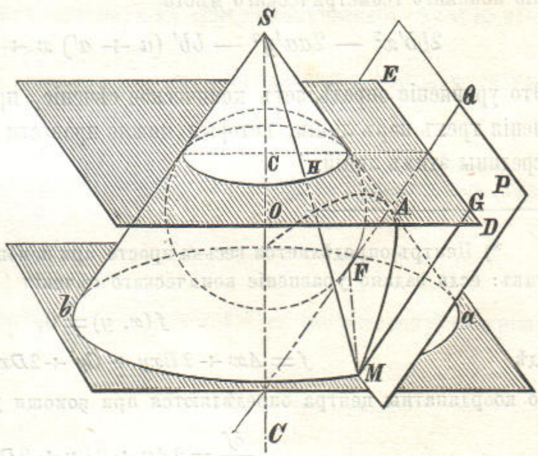


Черт. 95.

232. Если сѣкущая плоскость составляетъ съ осью конуса уголъ меньшій угла, составляемаго образующею съ осью, то въ сѣченіи получится гипербола. Въ самомъ дѣлѣ, (черт. 95) пусть Sa и Sb суть линіи пересѣченія прямого конуса съ плоскостью чертежа и cc_1 — его ось. Пересѣчемъ конусъ нѣкоторою плоскостью P, пересѣкающею обѣ полы конуса, въ сѣченіи получимъ кривую, состоящую изъ двухъ отдѣльныхъ вѣтвей. Круги съ центрами O и O_1 суть линіи пересѣченія съ плоскостью чертежа шаровъ, касающихся поверх-

ности конуса по кругамъ GD и HE и сѣкущей плоскости въ точкахъ F и F_1. Возьмемъ на кривой сѣченія точку M и проведемъ черезъ нее образующую конуса ME, она коснется шаровъ O и O_1 въ точкахъ D и E. Соединивъ точку M съ точками F и F_1, получимъ MF касательную къ шару O и MF_1 касательную къ шару O_1, и такъ какъ касательныя, проведенныя къ шару изъ одной точки, равны, то $MF_1 = ME$ и $MF = MD$, а потому $MF_1 — MF = ME — MD = ED = GS + SH =$ постоян. вел. Итакъ, для точекъ полученной кривой сѣченія разность разстояній отъ точекъ F и F_1 равна постоянной величинѣ; слѣдовательно, это гипербола, ея большая ось будетъ AA', а F и F_1 суть ея фокусы.

233. Въ промежуточномъ случаѣ, если сѣкущая плоскость параллельна одной изъ образующихъ, получается парабола. Пусть Sa и Sb прямыя сѣченія поверхности конуса съ плоскостью чертежа (черт. 96) и Sc — ось конуса. Пересѣкаемъ конусъ плоскостью параллельною Sb и перпендикулярною къ плоскости чертежа, линія FQ представляетъ ея сѣченіе съ плоскостью чертежа. Кругъ O представляетъ слѣдъ сѣченія съ плоскостью чертежа шара, касающагося поверхности конуса по кругу C и плоскости P въ точкѣ F. Плоскость сѣченія и плоскость круга C опредѣляютъ своимъ пересѣченіемъ прямую DE, лежащую, очевидно, въ одной плоскости съ кривою сѣченія. Возьмемъ на послѣдней точку M, соединимъ ее съ F и опустимъ $\perp MG$ на прямую ED. Проведя образующую MS и плоскость параллельную C, проходящую черезъ M и пересѣкающую образующія Sa и Sb въ точкахъ a и b, будемъ имѣть: $MF = MH = MG$. Слѣдовательно, полученная кривая сѣченія будетъ парабола: осью ея служитъ линія PQ, фокусомъ — F, вершиною A и директрисою — ED.



Черт. 96.

Задачи на коническія сѣченія.

1. Найти уравненіе коническаго сѣченія, дѣлающаго отрѣзки a, a', b, b' на осяхъ. Отв. Отрѣзки даются уравненіями

$$x^2 - (a + a')\,x + aa' = 0,$$
$$y^2 - (b + b')\,y + bb' = 0;$$

но эти уравненія должно получить изъ общаго уравненія кривой, полагая $y = 0$, $x = 0$, откуда окончательное уравненіе искомой кривой будетъ

$$bb'x^2 + Bxy + aa'y^2 - bb'(a + a')x - aa'(b + b')y + aa'bb' = 0.$$

2. Найти уравненіе параболы, касающейся осей въ точкахъ $x = a$, $y = b$.

Отв. На основаніи предыдущей задачи получимъ

$$\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x}{a}\frac{y}{b} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{x}{a} - 2\frac{y}{b} + 1 = 0.$$

3. Найти геометрическое мѣсто центровъ коническаго сѣченія, проходящаго черезъ четыре точки *).

Отв. Примѣняясь къ обозначеніямъ 1-ой задачи, получимъ слѣдующее уравненіе искомаго геометрическаго мѣста

$$2bb'x^2 - 2aa'y^2 - bb'(a + a')x + aa'(b + b')y = 0.$$

Это уравненіе опредѣляетъ коническое сѣченіе, проходящее черезъ точки пересѣченія трехъ паръ линій, которыя можно провести черезъ четыре точки и черезъ средины этихъ линій.

---

*) Центръ опредѣляется весьма просто при помощи дифференціальнаго исчисленія такъ: если задано уравненіе коническаго сѣченія

$$f(x, y) = 0,$$

гдѣ

$$f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F,$$

то координаты центра опредѣляются при помощи уравненій

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2Ax + 2By + 2D = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2Bx + 2Cy + 2E = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если уравненіе коническаго сѣченія съ центромъ напишемъ въ видѣ

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0,$$

то координаты центра на основаніи сказаннаго опредѣлятся изъ уравненій

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2LA\alpha = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2LB\alpha + 2L\beta = 0,$$

но послѣднія уравненія равносильны системѣ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, что, какъ мы видѣли, справедливо. Для параболы получимъ противорѣчіе, которое покажетъ, что центра нѣтъ.

$$\alpha^2 + \beta = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2A\alpha = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2B\alpha + 2M = 0.$$

4. Сумма квадратовъ обратныхъ величинъ двухъ полудіаметровъ, составляющихъ прямой уголъ, есть величина постоянная.

Отв. Пусть длины этихъ полудіаметровъ суть a и b; дѣлая въ уравненіи

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = P$$

послѣдовательно $x = 0$, $y = 0$, получимъ

$$Aa^2 = P, \quad Cb^2 = P;$$

величины же $A + C$ и P не мѣняются отъ поворота системы координатъ на любой уголъ (см. § 148).

5. Показать, подобно тому, какъ мы дѣлали въ § 148 для прямоугольныхъ координатъ, что при преобразованіи одной косоугольной системы съ угломъ ω въ другую съ угломъ Ω, оставляя начало координатъ въ центрѣ коническаго сѣченія, величины $\dfrac{A + C - 2B\cos\omega}{\sin^2\omega}$, $\dfrac{B^2 - AC}{\sin^2\omega}$ суть инваріанты и обращаются въ выраженія, гдѣ вмѣсто ω стоитъ Ω.

6. Найти эксцентриситетъ коническаго сѣченія даннаго общимъ уравненіемъ (A) § 90.

Отв. Обратить вниманіе на § 151.

7. Найти условіе касанія линіи $\dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n} = 1$, къ коническому сѣченію $\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Отв. $\dfrac{a^2}{m^2} \pm \dfrac{b^2}{n^2} = 1$.

8. Найти уравненіе пары касательныхъ черезъ точку α_1, β_1 къ коническому сѣченію $L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0$.

Отв. $(L\alpha^2 + \beta^2 + P)(L\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 + P) - (L\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + P)^2 = 0$.

9. Найти уголъ между парою касательныхъ, проведенныхъ черезъ точку x_1, y_1 къ кривой $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Отв. Совокупность двухъ касательныхъ на основаніи задачи 8-ой будетъ

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{y^2} - 1\right)\left(\frac{x_1{}^2}{a^2} + \frac{y_1{}^2}{b^2} - 1\right) - \left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1\right)^2 = 0.$$

Три члена второго измѣренія, уравненные нулю, даютъ двѣ прямыя, проведенныя черезъ начало координатъ параллельно касательнымъ. Называя уголъ между этими двумя прямыми черезъ φ, получимъ

$$tang\,\varphi = \frac{2ab\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1}}{x_1^2+y_1^2-a^2-b^2}.$$

Уголъ будетъ прямой, если заданная точка лежитъ на кругѣ $x^2+y^2=a^2+b^2$.

10. Если даны двѣ параллельныя касательныя къ коническому сѣченію, то онѣ пересѣкутся третьею касательною такъ, что произведеніе отрѣзковъ, образуемыхъ на касательныхъ будетъ постоянно и равно квадрату полудіаметра, параллельнаго даннымъ касательнымъ.

Отв. Возьмемъ за оси координатъ діаметръ, параллельный касательнымъ и его сопряженный, то уравненіе кривой и третьей касательной будетъ $\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$, $\frac{xx_1}{a_1^2}+\frac{yy_1}{b_1^2}=1$; полагая въ уравненіи касательной $x=\pm a_1$, получимъ отрѣзки на постоянныхъ касательныхъ $y=\frac{b_1^2}{y_1}\left(1\mp\frac{x_1}{a_1}\right)$; искомое произведеніе $\frac{b_1^4}{y_1^2}\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}\right)=b_1^2$.

11. Черезъ точки O, O_1 проведены двѣ параллельныя хорды коническаго сѣченія OR и $O_1\rho$, пересѣкающія кривую, первая въ точкахъ R_1, R_2, а вторая въ точкахъ ρ_1, ρ_2. Показать, что отношеніе прямоугольниковъ $\frac{\overline{OR_1}\,.\,\overline{OR_2}}{\overline{O'_1\rho_1}\,.\,\overline{O_1\rho_2}}$ постоянно и не зависитъ отъ направленія хордъ.

Отв. Возьмемъ сначала за начало координатъ точку O, тогда уравненіе хорды будетъ θ равно постоянному, вводя полярныя координаты r и θ; для опредѣленія радіусовъ векторовъ точекъ R_1 и R_2 мы получимъ уравненіе

$$\mathfrak{A}r^2+2\mathfrak{B}r+\mathfrak{C}=0,$$

гдѣ $\mathfrak{A}=A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta$, $\mathfrak{B}=D\cos\theta+E\sin\theta$, $\mathfrak{C}=F$; произведеніе корней $OR_1.\,OR_2$ равно $\frac{F}{\mathfrak{A}}$. Если мы, не мѣняя направленія осей, перенесемъ начало координатъ въ точку O_1, то, для опредѣленія радіусовъ векторовъ точекъ ρ_1 и ρ_2 получимъ уравненіе $\mathfrak{A}r^2+2\mathfrak{B}_1r+\mathfrak{C}_1=0$, гдѣ $\mathfrak{A}$ прежнее, а $\mathfrak{C}_1=F_1$ (см. § 92); отсюда легко видѣть справедливость предложеннаго.

12. Прямоугольники изъ отрѣзковъ двухъ пересѣкающихся хордъ относятся какъ квадраты діаметровъ, параллельныхъ этимъ хордамъ.

Отв. Эта задача и двѣ слѣдующія суть слѣдствія задачи 11.

13. Касательныя, проведенныя изъ внѣшней точки, относятся какъ имъ параллельные діаметры.

14. Квадраты полухордъ, соотвѣтствующихъ какому нибудь діаметру, пропорціональны прямоугольникамъ изъ отрѣзковъ, образуемыхъ хордами на діаметрѣ.

15. Въ задачѣ 10 прямоугольникъ изъ отрѣзковъ третьей касательной равенъ квадрату ей параллельнаго полудіаметра.

Отв. Слѣдствіе задачъ 10 и 13.

16. Если какая нибудь касательная пересѣкаетъ два сопряженные діаметры, то прямоугольникъ изъ отрѣзковъ равенъ квадрату параллельнаго ей полудіаметра.

Отв. Взять за оси координатъ діаметръ параллельный касательной и его сопряженный.

17. Даны два произвольныхъ полудіаметра; если изъ оконечностей каждаго проведемъ хорду, соотвѣтствующую другому, то треугольники такъ составленные будутъ равновелики.

Отв. Принять во вниманіе задачу 14.

18. Вмѣсто хордъ въ предыдущей задачѣ взять касательныя и доказать аналогичное свойство.

Отв. Пусть координаты концевъ двухъ полудіаметровъ будутъ (x_0, y_0), (x_1, y_1), тогда удвоенная площадь треугольника, образованнаго двумя полудіаметрами и касательною въ концѣ одного изъ нихъ, будетъ

$$\frac{(x_0 y_1 - y_0 x_1)\, P}{\pm [A x_0 x_1 + B(x_0 y_1 + x_1 y_0) + C y_0 y_1]}$$

гдѣ A, B, C суть коэффиціенты уравненія коническаго сѣченія

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = P.$$

Симметричность выраженія, стоящаго въ скобкахъ указываетъ на справедливость предложеннаго.

19. Произведеніе отрѣзковъ, образуемыхъ осями на нормали отъ точки M, въ которой проведена къ кривой нормаль, равно квадрату полудіаметра, сопряженнаго съ діаметромъ, проходящимъ черезъ M.

Отв. Называя сказанный полудіаметръ черезъ b' получимъ для отрѣзковъ нормали величины $\frac{bb'}{a}$, $\frac{ab'}{b}$.

20. Произведеніе длины нормали *) и перпендикуляра изъ центра на касательную равно квадрату полуоси.

Отв. Разстояніе центра до касательной есть $\frac{ab}{b'}$ (см. зад. 19).

21. Выразить длину нормали черезъ уголъ φ, образуемый ею съ осью x-овъ.

Отв. $\frac{a\,(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$.

---

*) Подъ длиною нормали обыкновенно разумѣютъ разстояніе отъ точки M кривой, въ которой проведена нормаль до точки N, гдѣ нормаль пересѣкаетъ ось x-овъ.

22. Черезъ данную точку внѣ эллипса или гиперболы провести къ кривой нормаль.

Отв. Пусть X, Y будутъ координаты точки на кривой; уравненіе нормали въ этой точкѣ можно написать такъ $\frac{a^2 x}{X} - \frac{b^2 y}{Y} = c^2$; если нормаль проходитъ черезъ данную точку x_1, y_1, то будетъ $\frac{a^2 x_1}{X} - \frac{b^2 y_1}{Y} = c^2$, откуда точки на кривой, которыхъ нормали проходятъ черезъ (x_1, y_1) даются пересѣченіемъ кривой съ равносторонней гиперболою $c^2 XY = a^2 x_1 Y - b^2 y_1 X$.

23. Провести къ параболѣ нормаль черезъ точку, лежащую внѣ кривой.

24. Прямой уголъ вращается вокругъ вершины M, причемъ эта вершина лежитъ на коническомъ сѣченіи, если мы соединимъ прямою точки, въ которыхъ стороны угла пересѣкаютъ коническое сѣченіе, то эти прямыя проходятъ черезъ постоянную точку нормали къ коническому сѣченію въ точкѣ M.

Отв. Возьмемъ за координатныя оси касательную въ точкѣ M и нормаль, тогда уравненіе кривой будетъ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Ey = 0$; $F = 0$, ибо начало координатъ на кривой; $D = 0$, ибо касательная есть ось x-овъ, уравненіе которой $y = 0$. Уравненіе совокупности двухъ взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ начало есть

$$(y - \lambda x)\left(y + \frac{1}{\lambda} x\right) = 0, \text{ или } y^2 + \frac{1 - \lambda^2}{\lambda} xy - x^2 = 0.$$

Умножаемъ это уравненіе на A и складываемъ съ уравненіемъ кривой; получимъ

$$\left(B + A\frac{1 - \lambda^2}{\lambda}\right) xy + (C + A) y^2 + Ey = 0.$$

Это уравненіе разлагается на два: $y = 0$ и другое

$$\left(B + A\frac{1 - \lambda^2}{\lambda}\right) x + (C + A) y + E = 0.$$

Послѣднее уравненіе опредѣляетъ искомую хорду, соединяющую оконечности сторонъ прямого угла. Точка, въ которой эта прямая пересѣкаетъ ось y-овъ, опредѣляется, полагая $x = 0$; $y = -\frac{E}{C + A}$. Ордината y не зависитъ отъ перемѣннаго числа λ.

25. Найти координаты точки пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ въ двухъ точкахъ (x_1, y_1), (x_2, y_2) на кривой $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Отв. $X = \dfrac{x_1 + x_2}{1 + \dfrac{x_1 x_2}{a^2} + \dfrac{y_1 y_2}{b^2}}$, $Y = \dfrac{y_1 + y_2}{1 + \dfrac{x_1 x_2}{a^2} + \dfrac{y_1 y_2}{b^2}}$.

26. Найти координаты точки пересѣченія нормалей въ точкахъ (x_1, y_1), (x_2, y_2) (см. зад. 25).

Отв. $x = \frac{(a^2 - b^2)\, x_1 x_2 X}{a^4}$, $y = \frac{(b^2 - a^2)\, y_1 y_2 Y}{b^4}$, гдѣ X, Y получены въ задачѣ 25.

27. Если разстояніе какой нибудь точки на кривой отъ данной выражается цѣлою раціональною функціею первой степени ея координатъ, то кривая есть коническое сѣченіе.

28. Произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокусовъ на касательную, есть величина постоянная и равная квадрату малой полуоси b.

Отв. Разстоянія фокусовъ до касательной суть

$$\frac{b}{b'}(a - ex),\ \frac{b}{b'}(a + ex) \text{ (см. зад. 19)}$$

29. Доказать аналитически, что софокусныя коническія сѣченія пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

Отв. Возьмемъ двѣ кривыя $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a_1^{\ 2}} + \frac{y^2}{b_1^{\ 2}} = 1$; координаты x_1, y_1 пересѣченія ихъ удовлетворяютъ разности уравненій

$$\frac{a^2 - a_1^{\ 2}}{a^2 a_1^{\ 2}}\, x_1^{\ 2} + \frac{b^2 - b_1^{\ 2}}{b^2 b_1^{\ 2}}\, y_1^{\ 2} = 0.$$

Если коническія сѣченія софокусны, то $a^2 - a_1^{\ 2} = b^2 - b_1^{\ 2}$, откуда

$$\frac{x_1^{\ 2}}{a^2 a_1^{\ 2}} + \frac{y_1^{\ 2}}{b^2 b_1^{\ 2}} = 0,$$

что есть ни что иное, какъ условіе перпендикулярности касательныхъ

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1, \quad \frac{xx_1}{a_1^{\ 2}} + \frac{yy_1}{b_1^{\ 2}} = 1.$$

30. Найти длину прямой, проведенной черезъ центръ до пересѣченія съ касательной параллельно фокусному радіусу вектору точки касанія.

Отв. Искомая длина равна полуоси a.

31. Черезъ точку на малой оси эллипса провести къ эллипсу нормаль.

Отв. Провести черезъ заданную точку и два фокуса кругъ, который пересѣчетъ эллипсъ въ искомыхъ точкахъ.

32. Черезъ точку P проведены двѣ касательныя PT и PT_1; соединяя фокусы коническаго сѣченія F и F_1 съ точкою P, получимъ $\angle TPF = \angle T_1PF_1$.

Отв. Слѣдствіе задачи 28.

33. Если черезъ точку P коническаго сѣченія S проведемъ двѣ касательныя къ софокусному сѣченію, то эти касательныя одинаково наклонены къ касательной въ точкѣ P къ кривой S.

Отв. Слѣдствіе задачи 32.

34. Найти геометрическое мѣсто основаній перпендикуляра изъ фокуса на касательную.

Отв. $\xi^2 + \eta^2 = a^2$, гдѣ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ уравненіе заданнаго коническаго сѣченія. Для параболы $y^2 = 2px$ получимъ прямую $x = 0$.

35. Если вершина прямого угла лежитъ на окружности круга и одна изъ его сторонъ проходитъ черезъ постоянную точку F, то другая сторона касается нѣкотораго коническаго сѣченія.

Отв. Заключеніе обратное задачѣ 34. Если точка F лежитъ внутри круга, то будетъ эллипсъ, если же внѣ, то гипербола.

36. Радіусъ векторъ, проведенный изъ фокуса къ полюсу хорды, дѣлитъ пополамъ уголъ между радіусами векторами, проведенными изъ того же фокуса къ концамъ хорды.

Отв. Доказательство можно основать на томъ соображеніи, что уголъ между радіусомъ векторомъ, проведеннымъ изъ фокуса въ нѣкоторую точку $P(x, y)$ и радіусомъ векторомъ точки касанія $M(x_1, y_1)$ касательной, проходящей черезъ точку P, не зависитъ отъ координатъ x_1, y_1 точки касанія. Въ самомъ дѣлѣ, обозначая радіусы векторы и полярные углы точекъ P и M черезъ (ρ, θ), (ρ_1, θ_1), получимъ для эллипса $\rho \cos \theta = x - c$, $\rho \sin \theta = y$; $\rho_1 \cos \theta_1 = x_1 - c$, $\rho_1 \sin \theta_1 = y_1$, откуда $\rho\rho_1 \cos(\theta - \theta_1) = (x - c)(x_1 - c) + yy_1$, но принимая во вниманіе уравненіе касательной $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$, мы получимъ

$$\rho\rho_1 \cos(\theta - \theta_1) = (a - ex)(a - ex_1);$$

но $\rho_1 = a - ex_1$, слѣдовательно, $\cos(\theta - \theta_1) = \frac{a - ex}{\rho}$. Эта величина зависитъ только отъ координатъ x, y точки P, что и требовалось доказать.

37. Прямая, соединяющая фокусъ съ полюсомъ хорды, проходящей черезъ этотъ фокусъ, перпендикулярна къ этой послѣдней.

Отв. Частный случай задачи 36.

38. Черезъ фокусъ F проведенъ перпендикуляръ къ радіусу вектору FM точки касанія M касательной MT; показать, что этотъ перпендикуляръ встрѣчается съ касательною на директрисѣ.

Отв. Слѣдствіе задачи 36. $\theta - \theta_1 = 90°$.

39. Уголъ, стягиваемый въ фокусѣ частью перемѣнной касательной, заключенной между двумя постоянными, есть величина постоянная.

Отв. Разсматриваемый уголъ есть половина угла стягиваемаго хордою прикосновенія *) двухъ касательныхъ.

---

*) Хордою прикосновенія двухъ касательныхъ называется прямая, соединяющая точки касанія этихъ касательныхъ.

40. Изъ точки P внѣ коническаго сѣченія съ центромъ проведены двѣ касательныя PT и PT_1; на хорду соприкосновенія TT_1 опущены перпендикуляры изъ центра C и точки P, причемъ первый перпендикуляръ встрѣчаетъ хорду TT_1 въ точкѣ M, а второй встрѣчаетъ ось коническаго сѣченія (на которой фокусы) въ точкѣ N. Доказать, что $\overline{CM}\,.\,\overline{PN} = b^2$.

Отв. Когда P лежитъ на коническомъ сѣченіи, теорема выражаетъ длину нормали $\dfrac{bb'}{a} = \overline{PN}$.

41. Если, принимая условія задачи 40, мы проведемъ изъ фокусовъ перпендикуляры FG и F_1G_1 на TT_1 и кромѣ того обозначимъ черезъ N_1 точку пересѣченія хорды TT_1 съ перпендикуляромъ PN, то получимъ $\overline{FG}\,.\,\overline{F_1G_1} = \overline{CM}\,.\,\overline{NN_1}$.

Отв. Сравнить задачу 28.

42. Фокусъ образуетъ на всякой хордѣ, черезъ него проходящей, два отрѣзка, среднее гармоническое *) между которыми есть параметръ.

Отв. Взявъ полярное уравненіе коническаго сѣченія, получимъ для двухъ отрѣзковъ выраженія $\dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$, $\dfrac{p}{1 - e\cos\theta}$.

43. Прямоугольникъ изъ отрѣзковъ фокусной хорды находится въ постоянномъ отношеніи съ самой хордой.

Отв. Длина хорды $\dfrac{2p}{1 - e^2\cos^2\theta}$ (см. зад. 42).

44. Написать полярное уравненіе, принимая за полюсъ центръ.

Отв. $r^2 = \dfrac{b^2}{1 - e^2\cos^2\theta}$.

45. Діаметръ параллельный нѣкоторой фокусной хордѣ есть среднее пропорціональное между длиною этой хорды и длиною оси $2a$.

Отв. Сравни задачи 44, 43.

46. Сумма двухъ фокусныхъ хордъ, параллельныхъ сопряженнымъ діаметрамъ постоянна.

Отв. Слѣдствіе задачи 45 и § 196.

47. Сумма обратныхъ величинъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ фокусныхъ хордъ постоянна.

Отв. Слѣдуетъ изъ задачъ 45, 4.

48. Треугольникъ, составляемый касательною гиперболы съ ассимптотами есть величина постоянная.

Отв. Уравненіе гиперболы $xy = k^2$. Площадь треугольника $2k^2 \sin\theta$, гдѣ θ уголъ между ассимптотами.

---

*) Среднимъ гармоническимъ двухъ чиселъ a и b называется число c, удовлетворяющее уравненію $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{c}$.

49. Двѣ постоянныя точки гиперболы соединены съ третьею перемѣнною точкой той же гиперболы двумя прямыми. Эти прямыя образуютъ на одной изъ ассимптотъ постоянный отрѣзокъ.

Отв. $x_1 y_1 = k^2$, $x_2 y_2 = k^2$, пусть будутъ перемѣнныя координаты третьей точки ξ, η; $\xi\eta = k^2$, $\frac{x-\xi}{x_1-\xi} = \frac{y-\eta}{y_1-\eta}$, $\frac{x-\xi}{x_2-\xi} = \frac{y-\eta}{y_2-\eta}$, полагая $x = 0$, получимъ $y_0 = \eta - \xi\,\frac{y_1-\eta}{x_1-\xi}$, $y_0{}' = \eta - \xi\,\frac{y_2-\eta}{x_2-\xi}$; остается показать, что $y_0 - y_0{}'$ не зависитъ отъ ξ и η.

50. Перпендикуляръ изъ фокуса на ассимптоту равенъ мнимой полуоси b гиперболы.

51. Разстояніе фокуса отъ какой нибудь точки гиперболы равно прямой, проведенной черезъ эту точку, параллельно ассимптотѣ до встрѣчи съ директрисою.

Отв. Отсюда выводимъ способъ черченія гиперболы непрерывнымъ движеніемъ подобно указанному въ § 207 для параболы и отличающійся тѣмъ, что треугольникъ, скользящій по линейкѣ дѣлаемъ не прямоугольнымъ, а косоугольнымъ.

52. Если a и b будутъ длины взаимно перпендикулярныхъ касательныхъ параболы $y^2 = 2px$, а $m = \frac{p}{2}$, то доказать, что $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}} + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{m^{\frac{2}{3}}}$.

Отв. Принимая за оси координатъ перпендикулярныя касательныя, получимъ уравненіе параболы (см. зад. 2) $p = \frac{2a^2 b^2}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$ (см. § 115).

53. Отрѣзокъ, отсѣкаемый на оси параболы полярами точекъ M_1 и M_2 равенъ отрѣзку, отсѣкаемому на той же оси перпендикулярами къ оси изъ этихъ точекъ.

54. Точка пересѣченія касательной къ параболѣ съ осью и точка касанія лежатъ въ равномъ разстояніи отъ фокуса.

Отв. Оба разстоянія равны $x + \frac{p}{2}$ (см. § 205).

55. Касательная дѣлитъ пополамъ уголъ между діаметромъ и фокуснымъ радіусомъ векторомъ, проведеннымъ черезъ точку касанія.

Отв. Слѣдствіе задачи 54 (см. § 220).

56. Найти длину перпендикуляра изъ фокуса на касательную.

Отв. $\frac{1}{2}\sqrt{p(2x+p)}$. Эта длина равна половинѣ нормали.

57. Выразить перпендикуляръ изъ фокуса въ функціи угла имъ составляемаго съ осью (см. зад. 56).

Отв. $\frac{p}{2\cos\alpha}$, гдѣ α есть разсматриваемый уголъ, слѣдовательно, уравненіе касательной къ параболѣ можетъ быть написано такъ

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + \frac{p}{2 \cos \alpha} = 0.$$

Вывести отсюда рѣшеніе задачи 34.

58. Уголъ между касательными параболы равенъ половинѣ угла между радіусами векторами, проведенными изъ фокуса въ точки касанія.

Отв. Слѣдствіе задачи 54. Уголъ, составляемый касательною съ осью, есть половина угла, составляемаго радіусомъ векторомъ съ тою же осью.

59. Линія, соединяющая фокусъ параболы съ пересѣченіемъ двухъ касательныхъ, дѣлитъ пополамъ уголъ между радіусами векторами точекъ касанія.

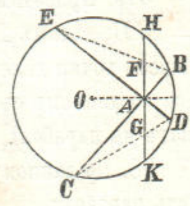
Отв. Эта задача совпадаетъ съ задачею 36.

60. Проведена хорда, пересѣкающая параболу въ двухъ точкахъ P и P_1, а директрису въ точкѣ D; соединяя три точки P, P_1, D прямыми съ фокусомъ F, получимъ, что прямая FD будетъ внѣшнимъ биссекторомъ угла, образуемаго другими двумя FP и FP_1.

61. Кругъ описанный около треугольника, составленнаго тремя касательными параболы, пройдетъ черезъ фокусъ.

Отв. Смотри задачи 60 и 39. Фокусъ и три точки сѣченія трехъ касательныхъ образуютъ четыреугольникъ, который можно вписать въ кругъ, ибо сумма угловъ при фокусѣ и противоположнаго равна двумъ прямымъ.

62. Черезъ средину A произвольной хорды круга HK проведены двѣ произвольныя хорды BC и DE (см. черт. 97); концы хордъ соединены двумя прямыми EB и CD; эти прямыя пересѣкаютъ хорду HK въ двухъ точкахъ F и G. Требуется доказать что $HF = GK$.



Черт. 97.

Отв. Возьмемъ за оси координатъ прямыя OA и OH; пусть уравненіе круга будетъ $S = o$; уравненіе совокупности двухъ хордъ BC и ED будетъ $(y - \lambda x)(y - \mu x) = o$. Уравненіе пары прямыхъ EB и CD будетъ имѣть видъ $S - k(y - \lambda x)(y - \mu x) = o$, гдѣ k получается, приравнивая нулю дискриминантъ (см. § 88). Рѣшеніе задачи не требуетъ нахожденія числа k.

63. Доказать, что если изъ точки M внѣ параболы проведены къ ней касательныя и діаметръ то этотъ діаметръ будетъ дѣлить пополамъ хорду соприкосновенія.

64. Поляра любой точки M относительно гиперболы параллельна хордѣ, соединяющей точки сѣченія гиперболы двумя прямыми, проведенными черезъ точку M параллельно ассимптотамъ и доказать, что сказанная хорда лежитъ въ одинаковомъ разстояніи отъ точки M и ея поляры.

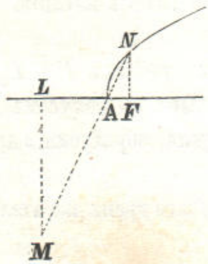
Отв. Возьмемъ точку M за начало координатъ. Поляра точки M будетъ

$Dx + Ey + F = o$; направленіе ассимптотъ опредѣляется уравненіемъ $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = o$. Точки пересѣченія гиперболы съ прямыми проведенными изъ начала параллельно ассимптотамъ будутъ лежать на прямой $2Dx + 2Ey + F = o$ (уравн. гиперболы (A) § 90).

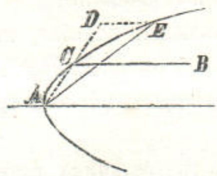
65. По данному очертанію параболы найти ось, вершину и фокусъ.

Отв. Для построенія фокуса откладываемъ (см. черт. 98) на оси произвольно LA, далѣе $LM \perp LA$ и $LM = 2LA$, проводимъ MA до N и изъ N опускаемъ перпендикуляръ NF на ось. Точка F будетъ фокусомъ.

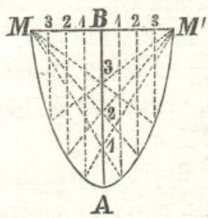
66. По данному діаметру параболы найти хорды, которыя онъ дѣлитъ пополамъ.



Черт. 98.



Черт. 99.



Черт. 100.

Отв. Черезъ вершину A проводимъ (см. черт. 99) прямую AC, откладываемъ $CD = AC$; проводимъ $DE \parallel CB$; AE будетъ искомая хорда.

67. По даннымъ оси AB, вершинѣ A, и точкѣ M очертить параболу.

Отв. Проводимъ MM' (см. черт. 100) перпендикулярно AB; беремъ $M'B = MB$; дѣлимъ MB на n равныхъ частей и BA на столько-же равныхъ частей. Черезъ точки дѣленія MB проводимъ прямыя, параллельныя оси, а точки дѣленія оси соединяемъ съ точкою M'. Точки пересѣченія соотвѣтственныхъ прямыхъ лежатъ на параболѣ.

68. По данному діаметру AB, концу его A и сопряженной хордѣ CD очертить параболу.

Отв. 1-й способъ. На діаметрѣ параболы (см. черт. 101) AB откладываемъ въ обѣ стороны произвольныя части $AK = AL$. Дѣлаемъ построеніе, указанное на чертежѣ; точки N и M лежатъ на параболѣ.

2-й способъ. На діаметрѣ AB (см. черт. 102) и полухордѣ BC строимъ параллелограммъ, дѣлимъ стороны CE и CB на n равныхъ частей. Точки дѣленія CE соединяемъ съ точкою A, а черезъ точки дѣленія CO проводимъ прямыя параллельныя діаметру. Точки пересѣченія соотвѣтственныхъ прямыхъ лежатъ на параболѣ.

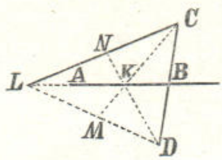
69. Начертить параболу, касательную въ точкахъ A и B къ двумъ прямымъ CA и CB взаимно перпендикулярнымъ.

Отв. Построеніе параболы по касательной можно сдѣлать на основаніи сказаннаго въ § 129, но можно найти непосредственно фокусъ и директрису на основанiи слѣдующаго соображенiя. Соединяемъ (см. черт. 103) точки касанiя A и B, беремъ средину K отрѣзка AB. Директрисса CD есть перпендикуляръ въ точкѣ C къ прямой CK; $EB \perp DC$; $FB = EB$; F есть фокусъ.

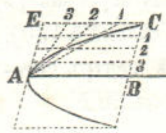
70. Черезъ точку M на параболѣ провести касательную.

Отв. 1-й способъ. Проводимъ дiаметръ точки M, находимъ направленiе ему соотвѣтствующихъ хордъ. Касательная будетъ параллельна этимъ хордамъ.

2-й способъ. Радiусомъ FM изъ фокуса F засѣкаемъ на оси параболы за вершину точку T; MT будетъ касательная.



Черт. 101.



Черт. 102.

Черт. 103.

3-й способъ. Проводимъ дiаметръ точки M до встрѣчи съ директриссою въ точкѣ C. Касательная будетъ перпендикулярна къ прямой CF.

4-й способъ. Можно строить касательную на основанiи соображенiй §§ 128, 129.

71. Черезъ точку внѣ параболы провести касательную.

Отв. 1-й способъ. Изъ точки M радiусомъ MF проводимъ окружность, засѣкающую директрису въ точкахъ C и C_1; перпендикуляры CN и C_1N_1 къ директрисѣ пересѣкаютъ параболу въ точкахъ касанiя N и N_1.

2-й способъ. Черезъ точку M проводимъ дiаметръ пересѣкающiй параболу въ точкѣ A отъ точки A въ другую сторону откладываемъ отрѣзокъ $AB = AM$ (см. § 129).

3-й способъ. Черезъ точку A опускаемъ перпендикуляръ AP на ось, откладываемъ отъ вершины параболы O отрѣзокъ $OP_1 = OP$, P_1A касается параболы въ точкѣ A и слѣдовательно хорда прикосновенiя $IV\ IV_1$ параллельна P_1A и проходитъ черезъ B.

72. Провести касательную къ параболѣ параллельно данной прямой.

Отв. 1-й способъ. Проводимъ произвольную хорду параллельно данной прямой, дѣлимъ хорду пополамъ и указываемъ дiаметръ, соотвѣтствующiй хордѣ; черезъ точку пересѣченiя дiаметра съ параболой проводимъ параллельно хордѣ прямую, эта прямая есть искомая касательная.

2-й способъ. Изъ фокуса F опускаемъ на заданную прямую перпендикуляръ. Этотъ перпендикуляръ пересѣчетъ директрису въ точкѣ C. Перпендикуляръ возстановленный въ серединѣ отрѣзка CF есть искомая касательная.

73. Провести нормаль къ параболѣ въ данной точкѣ M параболы.

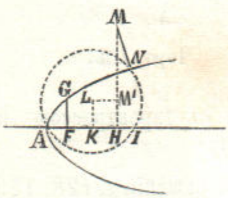
Отв. Изъ фокуса F радіусомъ равнымъ MF описываемъ кругъ, который пересѣкаетъ ось въ точкѣ принадлежащей нормали.

74. Провести нормаль къ параболѣ изъ точки M внѣ кривой.

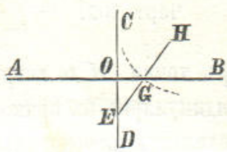
Отв. Изъ точки M (см. черт. 104) опускаемъ на ось перпендикуляръ MH; отрѣзокъ $HI = p$ параметру; черезъ точки A и I проводимъ кругъ, центръ котораго имѣетъ ординату $LK = \frac{1}{4} HM$. Этотъ кругъ пересѣкаетъ параболу въ искомой точкѣ N.

75. Провести нормаль изъ точки M заданной на оси.

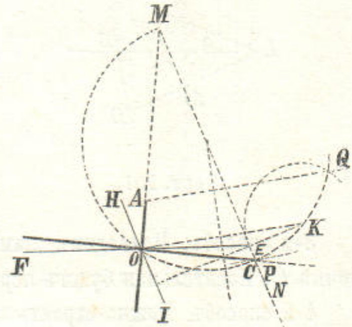
Отв. Отъ точки M въ сторону вершины откладываемъ длину параметра MN. Перпендикуляръ къ оси въ точкѣ N пересѣкаетъ параболу въ искомыхъ точкахъ (сравни § 130). Точки искомыя лежатъ на кругѣ, центръ котораго въ фокусѣ F, а радіусъ есть MF.



Черт. 104.



Черт. 105.



Черт. 106.

76. По данному діаметру эллипса или гиперболы построить его сопряженный.

Отв. Построеніе основано на свойствахъ дополнительныхъ хордъ.

77. По данной большой оси AB и точкѣ H начертить эллипсъ.

Отв. Найдемъ малую ось. Изъ точки H, какъ центра, радіусомъ $HE = AO$, гдѣ O средина AB, описываемъ кругъ. GH будетъ малою осью. (См. черт. 105).

78. По данной малой оси DC (см. черт. 105) и точкѣ H начертить эллипсъ.

Отв. Рѣшеніе аналогичное съ рѣшеніемъ задачи 77.

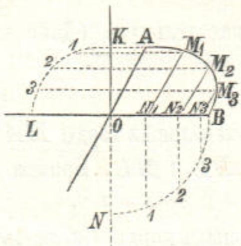
79. По даннымъ сопряженнымъ діаметрамъ FE и HI найти оси эллипса, не имѣя его обвода.

Отв. Проводимъ черезъ E линіи EK (см. черт. 106) перпендикулярно къ HI, откладываемъ $EK = OH$. Соединяемъ K съ O; $MN \parallel HI$. Черезъ точки O и K проводимъ кругъ, имѣющій центръ на прямой MN; точки M, N лежатъ на искомыхъ осяхъ. Изъ центра K радіусомъ EK проводимъ кругъ PEQ и черезъ точки P и Q прямыя PC и QA параллельно OK. A и C суть вершины.

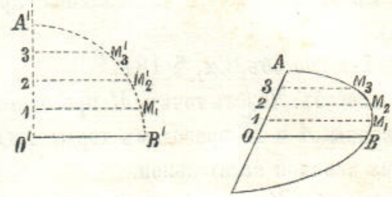
80. По даннымъ сопряженнымъ діаметрамъ начертить эллипсъ.

Отв. 1-й способъ. По рѣшенію предыдущей задачи находимъ оси.

2-й способъ. Изъ центра O проводимъ перпендикуляръ OK къ одному изъ діаметровъ OB (см. черт. 107); $AK \parallel OB$. Изъ центра O проводимъ четверть окружности KL и BN. Эти дуги дѣлимъ на одинаковое число равныхъ частей; черезъ точки дѣленія KL проводимъ прямыя $1M_1$, $2M_2$,... параллельно діаметру OB, черезъ точки же дѣленія BN прямыя параллельныя KN до встрѣчи съ діаметромъ OB въ точкахъ N_1, N_2,..., черезъ эти послѣднія точки проводимъ прямыя $N_1 M_1$, $N_2 M_2$,... Точки встрѣчи M_1, M_2,... лежатъ на искомомъ эллипсѣ.

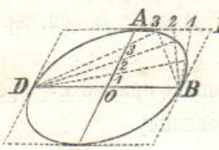


Черт. 107.

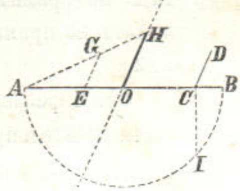


Черт. 108.

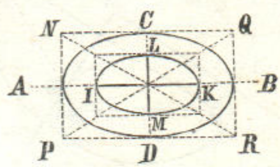
3-й способъ. На радіусѣ $O'B'=OB$ (см. черт. 108) строимъ четверть окружности B_1A_1; радіусъ A_1O_1 дѣлимъ точками 1, 2, 3,... на нѣкоторое число n равныхъ частей. Въ этихъ точкахъ возставляемъ перпендикуляры $1M'_1$, $2M'_2$, $3M'_3$,... Полудіаметръ OA дѣлимъ на n равныхъ частей; черезъ точки дѣленія 1, 2, 3,...



Черт. 109.



Черт. 110.



Черт. 111.

проводимъ прямыя $1M_1$, $2M_2$, $3M_3$,..., параллельныя полудіаметру OB, на этихъ прямыхъ откладываемъ отрѣзки $1M_1=1M'_1$, $2M_2=2M'_2$, $3M_3=3M'_3$,...; точки M_1, M_2, M_3 принадлежатъ искомому эллипсу.

4-й способъ. Проводимъ AE и BE параллельно заданнымъ діаметрамъ DB и AC. Дѣлимъ OA и EA на n равныхъ частей точками 1, 2, 3.... Соединяемъ прямыми точки дѣленія OA съ точкою D и точки дѣленія AE съ точкою B. (см. черт. 109).

81. По данному діаметру AB и полухордѣ CD, соотвѣтствующей ему, построить другой сопряженный діаметръ эллипса.

Отв. На AB (см. черт. 110) описываемъ полукругъ; $CI \perp AB$; $AE=CI$; $EG \parallel OH \parallel DC$; $GE=DC$; соединяемъ точки A и G прямою AG, которую проводимъ до пересѣченія съ діаметромъ OH; OH будетъ искомый полудіаметръ.

82. На данной большой оси IK начертить эллипсъ подобный данному.

Отв. Въ срединѣ O данной прямой IK проводимъ перпендикуляръ CD къ прямой IK (см. черт. 111). Отъ точки O откладываемъ $OB=OA=a$, $OC=OD=b$, гдѣ a, b суть полуоси заданнаго эллипса. Строимъ прямоугольникъ и проводимъ его діагонали; $NP \parallel QR \perp IK$; точки пересѣченія съ діагоналями N, Q; P, R соединяемъ прямыми, образуется новый прямоугольникъ; LM будетъ малою осью искомаго эллипса, а IK большая ось.

83. Въ данной точкѣ M эллипса провести касательную. (Дано очертаніе эллипса).

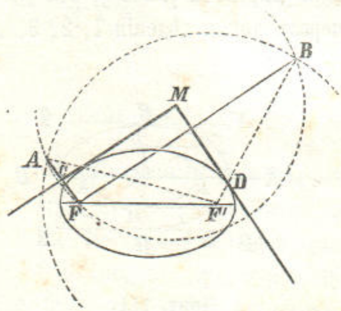
Отв. 1-й способъ. См. § 181.

2-й способъ. Черезъ точку M проводимъ двѣ произвольныя хорды MA и MB, черезъ концы A и B проводимъ хорды $AC \parallel MB$, $BD \parallel MB$. Прямая CD параллельна искомой касательной.

3-й способъ. Построеніе при помощи дополнительныхъ хордъ. См. §§ 177, 187.

84. Изъ точки M внѣ эллипса провести касательную.

Отв. Изъ фокуса F' проводимъ кругъ AB радіусомъ равнымъ $2a$, т. е. большой полуоси; изъ точки M какъ центра проводимъ кругъ AFB проходящій черезъ фокусъ F; точки встрѣчи A и B двухъ круговъ соединяемъ съ фокусомъ F'. Искомыя касательныя будутъ перпендикуляры MC и MD на прямыя FA и FB. Точки касанія лежатъ на прямыхъ $F'A$ и $F'B$ (см. черт. 112).



Черт. 112.

85. Параллельно данной прямой PQ провести касательную къ эллипсу.

Отв. 1-й способъ. Параллельно PQ проводимъ діаметръ эллипса; находимъ діаметръ сопряженный, концы котораго будутъ точками касанія.

2-й способъ. Изъ фокуса F_1 проводимъ кругъ радіусомъ, равнымъ большой оси эллипса; изъ фокуса F проводимъ прямую $L \perp PQ$. Прямая L пересѣкаетъ кругъ въ точкахъ A и B, дѣлимъ отрѣзки FA и FB точками C и D пополамъ; точки C и D лежатъ на искомыхъ касательныхъ. Точки касанія лежатъ на прямыхъ F_1A и F_1B.

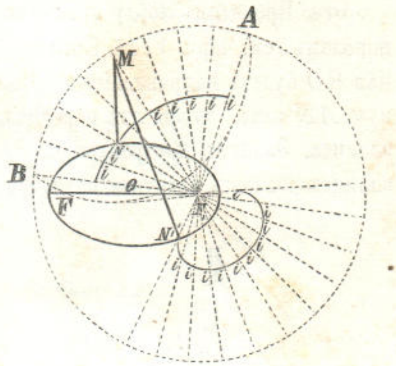
86. Провести нормаль къ эллипсу въ данной точкѣ на обводѣ его.

Отв. 1-й способъ. Проводимъ радіусы векторы и дѣлимъ уголъ между ними пополамъ.

2-й способъ. Проводимъ касательную и возставляемъ къ ней перпендикуляръ.

87. Изъ точки M внѣ эллипса провести нормаль.

Отв. Изъ M какъ центра описываемъ дугу AFB, проходящую черезъ фокусъ F; изъ другого фокуса F_1 радiусомъ $2a$ описываемъ кругъ, который пересѣкаетъ дугу въ точкахъ A и B. Изъ F_1 проводимъ рядъ радiусовъ дуги AB (см. черт. 113). Части этихъ радiусовъ заключающiяся между дугою AB и частью другой окружности дѣлимъ пополамъ; черезъ точки дѣленiя i, i', i'',... очерчиваемъ кривую; точка встрѣчи этой кривой съ эллипсомъ N будетъ концомъ искомой нормали.


Черт. 113.

88. Около даннаго эллипса описать квадратъ.

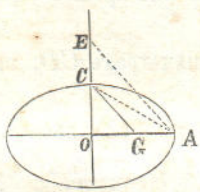
Отв. Изъ центра эллипса радiусомъ равнымъ $\sqrt{a^2+b^2}$ описать кругъ, этотъ кругъ пересѣкаетъ оси въ вершинахъ искомаго квадрата.

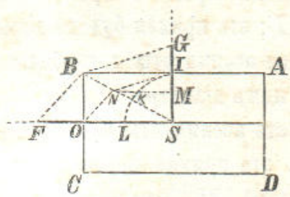
89. Въ данномъ эллипсѣ вписать квадратъ.

Отв. $OE=AC=\sqrt{a^2+b^2}$, $CG \parallel AE$ (см. черт. 114), OG будетъ равна половинѣ стороны искомаго квадрата.

90. Около даннаго прямоугольника описать эллипсъ, котораго оси пропорцiональны сторонамъ прямоугольника.

Отв. Радiусомъ IS изъ точки S описываемъ кругъ, черезъ K, средину дуги


Черт. 114.


Черт. 115.

IL, проводимъ NM параллельно AB; соединяемъ N съ I и O (см. черт. 115) проводимъ $BG \parallel NI$ и $BF \parallel NO$; SG и SF будутъ полуоси эллипса.

91. Въ данномъ равностороннемъ треугольникѣ ABC вписать эллипсъ, такъ чтобы одна изъ осей была параллельна сторонѣ AC, а другая ось равнялась прямой ED.

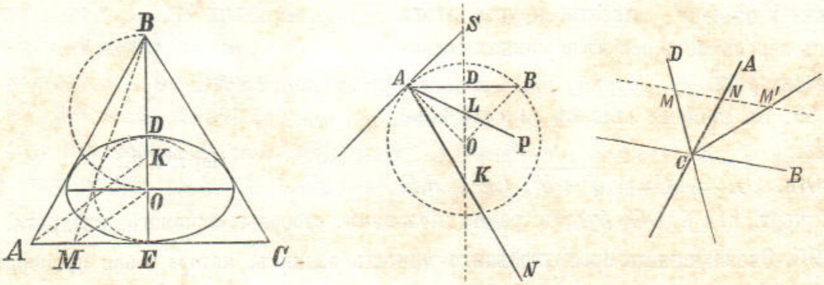
Отв. На линiи ED описываемъ кругъ (см. черт. 116) проводимъ изъ B касательную BM къ кругу; проводимъ MO и параллельную ей AK; KE будетъ равна половинѣ неизвѣстной оси.

92. Въ данномъ квадратѣ вписать эллипсъ по данному отношенiю между осями.

Отв. Описываемъ около квадрата кругъ; вписываемъ въ кругъ прямоугольникъ такъ, чтобы отношеніе между сторонами его равнялось данному отношенію между осями эллипса и чтобы его стороны были параллельны діагоналямъ квадрата. Стороны этого прямоугольника будутъ искомыми осями эллипса.

93. Къ данному кругу провести эллипсъ касательный въ данныхъ точкахъ A и B.

Отв. Проводимъ хорду AB и касательную AS въ A; раздѣляемъ уголъ AOB пополамъ (см. черт. 117). Если требуемый эллипсъ долженъ касаться извнѣ, прямая SO будетъ направленіемъ большой оси и тогда проводимъ произвольную прямую AN такъ, чтобы она пересѣкла SO за точкою O; точка K будетъ центръ эллипса. Эллипсъ построится по центру K, касательной AS и точкѣ B. Если эллипсъ долженъ касаться извнутри, линія SO будетъ направленіемъ малой оси и



Черт. 116. Черт. 117. Черт. 118.

тогда проводимъ черезъ A прямую AP такъ чтобы она прошла черезъ точку L между O и D; эта прямая будетъ діаметръ.

94. Даны ассимптоты гиперболы и одинъ изъ діаметровъ CD, найти сопряженный съ нимъ діаметръ.

Отв. Пусть ассимптоты будутъ CA и CB (см. черт. 118); проводимъ прямую $MN \parallel CB$, эта прямая пересѣкаетъ ассимптоту CA въ точкѣ N а данный діаметръ въ точкѣ M. Откладываемъ $M'N = MN$; сопряженный діаметръ будетъ CM'.

95. По ассимптотамъ и фокусу гиперболы найти вершины.

Отв. 1-й способъ. См. § 217.

2-й способъ. Изъ фокуса F опускаемъ перпендикуляръ на одну изъ ассимптотъ. Разстояніе другаго фокуса до этого перпендикуляра есть дѣйствительная ось гиперболы.

96. По даннымъ осямъ начертить гиперболу.

Отв. См. §§ 217, 215.

97. По даннымъ ассимптотамъ и точкѣ N на кривой начертить гиперболу.

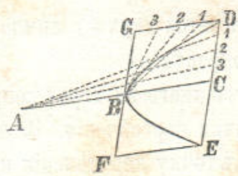
Отв. См. § 193.

98. По данному діаметру AB и данной хордѣ DE, соотвѣтствующей ему, начертить гиперболу.

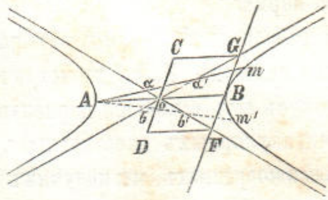
Отв. Проводимъ $GF \parallel DE$, $DG \parallel EF \parallel AC$. Дѣлимъ DG и CD на одинаковое число равныхъ частей. Точку A соединяемъ съ точками дѣленія CD, а точку B съ точками дѣленія DG. Точки пересѣченія проведенныхъ прямыхъ лежатъ на гиперболѣ (см. черт. 119).

99. По даннымъ сопряженнымъ діаметрамъ AB и CD начертить гиперболу.

Отв. 1-ый способъ. Проводимъ $GF \parallel CD$ и $GC \parallel FD \parallel AB$; OG и OF будутъ



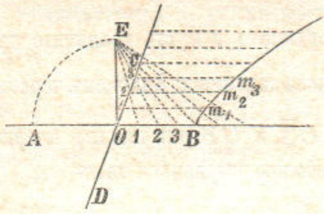
Черт. 119.



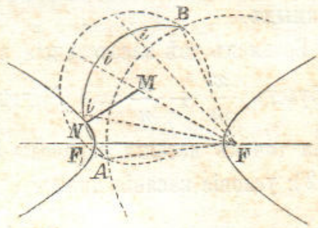
Черт. 120.

ассимптоты (см. черт. 120). Проводимъ изъ A прямыя Am, Am' . . ., откладываемъ $a'm = Aa$, $b'm' = Ab$ . . ., точки m, m' . . . будутъ на гиперболѣ.

2-ой способъ. Воставляемъ $OE \perp AB$; откладываемъ $OE = OA$; дѣлимъ BO и OC на n равныхъ частей и откладываемъ тѣ-же части по другую сторону B и C; соединяемъ E съ точками 1, 2, 3 . . . B; проводимъ черезъ точки дѣленія OC прямыя $1m_1$, $2m_2$, ... параллельно AB и откладываемъ части $1m_1 = E1$, $2m_2 = E2$ ..., и т. д. Точка m_1, m_2, ... ляжетъ на гиперболѣ (см. черт. 121).



Черт. 121.



Черт. 122.

100. Провести касательную черезъ точку M на гиперболѣ.

Отв. См. зад. 83.

101. Провести касательную къ гиперболѣ черезъ точку M внѣ кривой.

Отв. См. зад. 84.

102. Провести касательную къ гиперболѣ параллельно данной прямой.

Отв. См. зад. 85.

103. Провести нормаль къ гиперболѣ изъ точки M внѣ кривой.

Отв. Изъ точки M какъ центра радіусомъ MF_1 проводимъ кругъ, проходящій черезъ фокусъ F_1. Этотъ кругъ пересѣкаетъ въ точкахъ A и B кругъ описанный изъ фокуса F радіусомъ равнымъ $2a$ (см. черт. 122). Проводимъ изъ F рядъ прямыхъ и чертимъ кривую геометрическаго мѣста рединъ i хордъ, образованныхъ между двумя окружностями эта кривая пересѣкаетъ гиперболу въ искомой точкѣ N.

104. Провести нормаль черезъ точку M на равносторонней гиперболѣ.

Отв. Изъ точки M какъ центра радiусомъ равнымъ разстоянiю точки M отъ центра гиперболы проводимъ кругъ, который пересѣкаетъ ось гиперболы въ точкѣ лежащей на нормали.

105. Парабола съ постояннымъ параметромъ касается двухъ взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ. Найти геометрическое мѣсто фокусовъ.

Отв. Фокусъ есть основанiе перпендикуляра опущеннаго на хорду соприкосновенiя перпендикулярныхъ касательныхъ изъ ихъ точки пересѣченiя. Взявъ касательныя за оси координатъ, мы получимъ фокусъ какъ точку пересѣченiя прямыхъ: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ и $ax - by = 0$ (см. зад. 2). Принимая же во вниманiе $p = \frac{2a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$ (см. зад. 52), гдѣ p число постоянное, получимъ черезъ исключенiе a и b уравненiе искомаго геометрическаго мѣста

$$4x^2y^2 = p^2 (x^2 + y^2).$$

106. Найти геометрическое мѣсто фокусовъ параболъ, касающихся трехъ данныхъ прямыхъ.

Отв. Возьмемъ двѣ касательныя за оси координатъ и пусть уравненiе третьей прямой будетъ $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ (*), гдѣ m и n числа заданныя. Назовемъ черезъ a и b разстоянiя точекъ касанiя параболы съ осями $O\overline{X}$ и $O\overline{Y}$ отъ начала координатъ (см. зад. 2); условiе касанiя прямой (*) съ параболою выразится такъ

$$an + bm = ab. \qquad (**)$$

Принимая въ соображенiе, что уравненiе оси параболы будетъ

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2 + 2ab \cos\theta};$$

получимъ координаты фокуса

$$\xi = Rb, \ \eta = Ra,$$

гдѣ $R = \frac{ab}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$, а θ уголъ между осями.

Отсюда

$$\xi^2 + 2\xi\eta \cos\theta + \eta^2 = R^2 (a^2 + b^2 + 2ab \cos\xi) = Rab.$$

кромѣ того

$$\xi m + \eta n = R (bm + an) = R\,ab,$$

откуда

$$\xi^2 + 2\xi\eta \cos\theta + \eta^2 - \xi m - \eta n = 0.$$

Послѣднее же уравненіе есть уравненіе круга, описаннаго вокругъ треугольника, образованнаго заданными прямыми. Эта задача есть слѣдствіе задачи 61.

107. Доказать, что сумма угловъ, образуемыхъ двумя касательными къ параболѣ съ осью этой кривой, равняется углу между осью и прямою, проведенною изъ фокуса къ точкѣ пересѣченія этихъ касательныхъ.

Отв. Слѣдствіе задачъ 58 и 36.

108. Найти выраженіе длины хорды, образуемой нормалью въ какой нибудь точкѣ на параболѣ черезъ разстояніе ρ точки до фокуса и параметръ p.

Отв. $\dfrac{(2p\rho)^{3/2}}{p\left(\rho - \dfrac{p}{2}\right)}$.

109. Зная параметръ параболы, найти ея уравненіе относительно осей координатъ, совпадающихъ съ касательною и нормалью въ концѣ фокальной хорды, перпендикулярной къ оси.

Отв. Принимая во вниманіе, что касательная въ концѣ фокальной хорды, составляетъ съ осью уголъ въ 45°, мы получаемъ искомое уравненіе въ такомъ видѣ: $(x+y)^2 - cy = 0$. Остается опредѣлить коэффиціентъ c, который есть не что иное, какъ длина нормали, совпадающей съ осью y-овъ, и, слѣдовательно, на основаніи предыдущей задачи, $c = 4.\sqrt{2}\,p$, ибо $\rho = p$.

100. Зная параметръ параболы, написать ея уравненіе относительно осей координатъ, совпадающихъ съ двумя касательными въ концахъ фокальной хорды, перпендикулярной къ оси.

Отв. $(x-y)^2 - 2\sqrt{2}\,p\,(x+y) + 2p^2 = 0$.

111. Доказать, что всякій кругъ, построенный на фокальной хордѣ, какъ на діаметрѣ, касается директрисы.

Отв. Слѣдствіе зад. 63.

112. Если кругъ пересѣкаетъ коническое сѣченіе, то ихъ хорды пересѣченья составляютъ равные углы съ осью.

Отв. Слѣдствіе зад. 12 и § 200.

113. Пусть будетъ A вершина, F фокусъ параболы, ρ и ρ' радіусы векторы двухъ точекъ M и M' кривой, θ уголъ MFM', l длина хорды MM'; доказать слѣдующія, употребляемыя въ астрономіи, формулы

$$p = \frac{2\rho\rho'\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\rho+\rho' - 2\sqrt{\rho\rho'}\cos\dfrac{\theta}{2}};\quad 2\sqrt{\rho\rho'}\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{(\rho+\rho')^2 - l^2}.$$

Отв. См. зад. 108.

114. Черезъ точки пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

$$A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0$$

провести параболу, проходящую черезъ начало координатъ. Когда это возможно?

Отв. Обозначая черезъ $S = 0$ и $S_1 = 0$ уравненія заданныхъ коническихъ сѣченій, получимъ уравненіе коническаго сѣченія, проходящаго черезъ точки пересѣченія данныхъ, въ видѣ: $S - kS_1 = 0$; остается подобрать k такъ, чтобы было $(A - kA_1)(C - kC_1) - (B - kB_1)^2 = 0$ и также $F - kF_1 = 0$; сказанное опредѣленіе k возможно, когда удовлетворяется условіе, получаемое черезъ исключеніе k изъ послѣднихъ двухъ уравненій.

115. Доказать, что всякая линія второго порядка, проходящая черезъ точки пересѣченія двухъ равностороннихъ гиперболъ, есть также гипербола равносторонняя.

Отв. Легко показать, что условіемъ равносторонности гиперболы будетъ равенство $A = -C$. Отсюда слѣдуетъ, что обозначая черезъ S и S_1 первыя части уравненій $S = 0$, $S_1 = 0$ двухъ равностороннихъ гиперболъ, мы получимъ уравненіе новой равносторонней гиперболы въ видѣ $S - kS_1 = 0$.

116. Доказать, что четыре точки пересѣченія двухъ линій второго порядка, оси которыхъ параллельны, лежатъ на одномъ кругѣ.

Отв. Уравненіе совокупности осей (**) выведено въ § 160. Уравненіе совокупности прямыхъ, проведенныхъ черезъ начало параллельно осямъ, есть

$$-L(Ax + By)^2 + \frac{A^2 + B^2 - L}{B}(Ax + By)Ly + L^2y = 0;$$

сокращая, получимъ

$$Bx^2 - (A - C)xy - By^2 = 0.$$

Условіе параллельности осей двухъ коническихъ сѣченій имѣетъ видъ

$$\frac{B_1}{B} = \frac{A_1 - C_1}{A - C},$$

откуда получается: $B_1A - A_1B = CB_1 - BC_1$; легко показать, что это же условіе выразитъ возможность провести черезъ точки пересѣченья кругъ, ибо

$$S - kS_1 = 0$$

будетъ давать кругъ, если $A - kA_1 = C - kC_1$, $B - kB_1 = 0$.

117. Двѣ хорды данной линіи второго порядка пересѣкаютъ одинъ изъ его діаметровъ на равныхъ разстояніяхъ отъ центра. Показать, что всякая линія второго порядка, проходящая черезъ концы обѣихъ хордъ, пересѣкаетъ этотъ діаметръ въ двухъ точкахъ, также равно удаленныхъ отъ центра.

Отв. Возьмемъ за оси координатъ два сопряженныхъ діаметра; уравненіе коническаго сѣченія будетъ: $\frac{x^2}{a_1^2} \pm \frac{y^2}{b_1^2} = 1$; уравненіе коническаго сѣченія, проходящаго черезъ точки пересѣченія хордъ съ даннымъ коническимъ сѣченіемъ, будетъ:

$$\frac{x^2}{a_1{}^2} \pm \frac{y^2}{b_1{}^2} - 1 - k\,[m\,(x - \delta) - y]\,[n\,(x + \delta) - y] = 0$$

изъ послѣдняго уравненія при всякомъ k для $y = 0$ получаемъ $x = \pm f(k)$.

118. Кривая второго порядка касается двухъ ассимптотъ нѣкоторой гиперболы. Доказать, что въ числѣ общихъ хордъ этихъ кривыхъ существуютъ двѣ параллельныя между собой.

Отв. Пусть будетъ уравненіе гиперболы $\alpha\beta - k^2 = 0$, гдѣ $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ассимптоты, тогда уравненіе касающагося ассимптотъ коническаго сѣченія будетъ $\alpha\beta - \gamma^2 = 0$; вычитая, получимъ $\gamma^2 - k^2 = 0$, что и требовалось доказать.

119. Даны кругъ и равносторонняя гипербола. Доказать, что если одна изъ общихъ хордъ есть діаметръ круга, то другая есть діаметръ гиперболы и обратно.

Отв. Уравненіе совокупности двухъ хордъ будетъ

$$A\,(x^2 - y^2) + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F - k\,(x^2 + y^2 - 1) = 0,$$

но $k = -F$, ибо одна изъ хордъ проходитъ черезъ начало координатъ. Получаемъ уравненіе

$$A_1x^2 + 2Bxy + C_1y^2 + 2Dx + 2Ey = 0, \qquad (*)$$

гдѣ $A_1 = A + F$, $C_1 = -A + F$. Выразимъ условіе дѣлимости первой части уравненія (*) на $y - \lambda x$; получимъ

$$A_1 + 2B\lambda + C_1\lambda^2 = 0, \quad D + E\lambda = 0.$$

Производя на самомъ дѣлѣ дѣленіе, получимъ

$$C_1y + 2\left(B + \frac{C_1\lambda}{2}\right)x + 2E = 0. \qquad (**)$$

Показать, что прямая, опредѣляемая уравненіемъ (**), проходитъ черезъ центръ кривой

$$A\,(x^2 - y^2) + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Обратное заключеніе можно получить, разсматривая уравненіе

$$x^2 - y^2 - 1 - k\,(lx + my)\,(ax + by + c) = 0,$$

дающее коническое сѣченіе, проходящее черезъ концы хордъ гиперболы, опредѣляемыхъ уравненіями

$$lx + my = 0, \quad ax + by + c = 0;$$

подбирая k, a, b такъ, чтобы выходило уравненіе круга, мы замѣчаемъ, что достаточно положить

$$k = \frac{2}{l^2 + m^2}, \quad a = l, \quad b = -m.$$

Уравненіе круга будетъ имѣть видъ

$$x^2 + y^2 - \frac{2lc}{m^2 - l^2}\,x - \frac{2mc}{m^2 - l^2} - \frac{m^2 + l^2}{m^2 - l^2} = 0.$$

Очевидно, что прямая $lx - my + c = 0$ есть діаметръ послѣдняго круга.

120. Показать, что совокупность двухъ прямыхъ, соединяющихъ вершину параболы $y^2 = 2px$ съ точками прикосновенія касательныхъ къ ней изъ точки x_1, y_1, выражается уравненіемъ

$$2px^2 - 2y_1xy + x_1y^2 = 0.$$

Отв. $y^2 - 2px - 2kx\,(yy_1 - px - px_1) = 0$. Разлагая на сумму квадратовъ и выражая условіе $P = 0$, получимъ $k = \dfrac{1}{x_1}$.

121. Синусы угловъ, составляемыхъ двумя прямыми съ осями параболы, относятся какъ m къ n. Въ какой зависимости между собой находятся разстоянія отъ вершины параболы до діаметровъ, проходящихъ черезъ середины хордъ, параллельныхъ этимъ прямымъ.

Отв. См. § 119.

122. Въ коническомъ сѣченіи перпендикуляръ, опущенный изъ фокуса на хорду, и діаметръ, дѣлящій эту хорду пополамъ, пересѣкаются на директрисѣ.

Отв. См. §§ 212, 197.

123. Доказать, что полудіаметръ эллипса или гиперболы есть среднее пропорціональное между прямыми, которыя соединяютъ фокусы съ концами діаметра, сопряженнаго первому.

Отв. См. §§ 210, 197.

124. Въ равносторонней гиперболѣ разстояніе точки кривой отъ центра есть среднее пропорціональное между разстояніями точки отъ фокусовъ.

Отв. См. предыдущую задачу и § 200.

125. Найти въ плоскости эллипса такой кругъ, чтобы длина касательной, проведенной къ кругу изъ каждой точки эллипса была функція раціональная, цѣлая и первой степени относительно координатъ этой точки.

Отв. Центръ круга лежитъ въ фокусѣ эллипса.

126. Доказать, что сумма или разность касательныхъ, проведенныхъ изъ каждой точки эллипса къ двумъ кругамъ, имѣющимъ предыдущее свойство, есть величина постоянная.

127. Данъ эллипсъ; сѣкущая обращается около неподвижной точки P; соединяемъ F съ точками M и M_1, въ которыхъ она пересѣкаетъ кривую. Доказать что произведеніе $tg\,\dfrac{PFM}{2}\,.\,tg\,\dfrac{PFM_1}{2}$ есть величина постоянная.

Отв. Продолжимъ сѣкущую MM_1 до пересѣченія въ точкѣ D съ директрисою и обозначимъ черезъ e эксцентриситетъ эллипса, а черезъ e' отношеніе разстояній точки P отъ директрисы и отъ фокуса, тогда

$$\frac{MF}{MD}:\frac{PF}{PD}=\frac{e}{e'}, \text{ или } \frac{\sin MDF}{\sin MFD}:\frac{\sin PDF}{\sin PFD}=\frac{e}{e'};$$

принимая во вниманіе задачи 36, 60, получимъ, обозначая черезъ T полюсъ хорды MM_1,

$$\cos PFT:\cos MFT=e:e',$$

но, согласно задачѣ 36, углы PFT и MFT суть полуразность и полусумма угловъ PFM и PFM_1; откуда требуемое въ задачѣ произведеніе тангенсовъ равно $\frac{e-e'}{e+e'}$. Очевидно, что это произведеніе останется постояннымъ, если точка P не будетъ постоянна, но будетъ находиться на коническомъ сѣченіи, имѣющемъ общіе фокусы и директрису съ даннымъ (см. § 213).

128. Если проведемъ нормали изъ оконечностей фокусной хорды, то линія, проведенная черезъ точку ихъ пересѣченія параллельно оси, дѣлитъ хорду пополамъ.

Отв. Взять полюсъ хорды, который, очевидно, лежитъ гдѣ нибудь на директрисѣ, а также принять во вниманіе задачу 26.

129. Прямая, соединяющая полюсъ фокусной хорды съ точкою пересѣченія нормалей въ концахъ хорды, проходитъ черезъ другой фокусъ.

Отв. См. задачу 128.

130. Данъ треугольникъ, составленный тремя касательными параболы; доказать относительно него, что три его высоты пересѣкаются на директрисѣ, что площадь его равна половинѣ треугольника, составленнаго тремя точками касанія, и найти радіусъ круга описаннаго.

Отв. Радіусъ круга описаннаго опредѣляется по формулѣ:

$$R^2=\frac{p_1\,p_2\,p_3}{4p},$$

гдѣ p_1, p_2, p_3 суть параметры, соотвѣтствующіе діаметрамъ, проходящимъ черезъ точки касанія (см. §§ 118, 119).

131. Найти выраженіе радіуса круга, описаннаго около треугольника, вписаннаго въ параболу.

Отв. $R^2=\frac{c_1\,c_2\,c_3}{4p}$, гдѣ c_1, c_2, c_3 суть параметры діаметровъ, дѣлящихъ пополамъ стороны треугольника (см. §§ 118, 119).

132. Если равносторонняя гипербола описана около треугольника, то она проходитъ черезъ пересѣченіе его высотъ.

Отв. Уравненіе коническаго сѣченія, пересѣкающаго оси въ данныхъ точкахъ, выведено въ задачѣ (1). При прямоугольной системѣ координатъ гипербола будетъ равносторонняя, если $bb'=-aa'$; отсюда $b'=-\frac{aa'}{b}$; точка (a, b') есть точка встрѣчи высотъ треугольника (o, b) (a, o) (a', o).

133. Равносторонняя гипербола, однофокусная съ даннымъ эллипсомъ, отсѣкаетъ на сторонахъ прямого угла, описаннаго около эллипса, равныя хорды.

Отв. Возьмемъ стороны прямого угла за оси координатъ. Уравненіе эллипса напишется такъ:

$$\frac{X^2}{a^2} + 2\frac{\lambda}{ab} X.Y + \frac{Y^2}{b^2} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda},$$

гдѣ $X = x - \frac{a}{1+\lambda}$, $Y = y - \frac{b}{1+\lambda}$. Уравненіе равносторонней гиперболы будетъ

$$AX^2 + 2BX.Y - AY^2 = 1.$$

Чтобы гипербола была софокусная, необходимо положить

$$B = A\frac{2\lambda ab}{b^2 - a^2}; \quad \frac{2}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)^2 + 4\lambda^2 a^2 b^2}}{(1+\lambda)^2},$$

откуда непосредственно слѣдуетъ справедливость высказаннаго въ задачѣ.

134. Если взять уголъ φ, разсматриваемый въ § 173, и обозначить черезъ u тотъ уголъ, который обозначенъ черезъ φ въ § 222, то получимъ

$$\rho = a(1 - e\cos\varphi),\ tg\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,.\,tg\frac{\varphi}{2};$$

ρ есть радіусъ векторъ точки на эллипсѣ (см. § 222), а e эксцентриситетъ.

135. Картушка компаса, составленная изъ m радіусовъ, обращается около своего центра, помѣщеннаго въ фокусѣ эллипса; доказать, что сумма обратныхъ величинъ длинъ, отсчитываемыхъ на каждомъ радіусѣ отъ фокуса до точки встрѣчи съ эллипсомъ, есть величина постоянная.

Отв. $\frac{m}{p}$, гдѣ p параметръ эллипса. Доказательство основано на равенствѣ

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\delta) + \cos(\alpha+2\delta) + \ldots + \cos[\alpha + (m-1)\delta] = 0,$$

гдѣ $\delta = \frac{2\pi}{m}$.

136. Изъ какой нибудь точки P, находящейся въ плоскости эллипса, проводимъ касательныя къ этому эллипсу; изъ точки P опускаемъ на хорду прикосновенія AB перпендикуляръ PC; прямыя PC и AB пересѣкаютъ малую ось въ точкахъ D и E; доказать, что кругъ, описанный на DE, какъ на діаметрѣ, пройдетъ черезъ оба фокуса.

137. Продолжая радіусы векторы, которые идутъ отъ какой нибудь точки M эллипса къ двумъ фокусамъ F и F', до точекъ ихъ пересѣченія P и Q съ кривой, доказать, что сумма $\frac{MF}{PF} + \frac{MF'}{QF'}$ есть величина постоянная.

Отв. Можно посовѣтовать взять полярныя координаты.

138. Дана равносторонняя гипербола и точка M, не лежащая на ней

точки M проведены нормали. Требуется: 1) провести черезъ основанія нормалей новую равностороннюю гиперболу, которой нормали въ этихъ точкахъ сходились бы въ одну точку, и указать положеніе послѣдней; 2) обозначая черезъ K гиперболу, удовлетворяющую предыдущему требованію, указать ту часть плоскости, въ которой нужно взять точку M, чтобы ей соотвѣтствовала дѣйствительная гипербола K; 3) какую линію должна описывать точка M, чтобы гипербола K была равна заданной.

Отв. 1) Пусть уравненіе заданной гиперболы будетъ $x^2 - y^2 = a^2$, а координаты точки $M(p, q)$. См. зад. 12. Гипербола K имѣетъ уравненіе

$$x^2 - y^2 - a^2 + \lambda(2xy - qx - py) = 0.$$

Возьмемъ точку встрѣчи нормалей гиперболы K произвольно, пусть ея координаты будутъ α и β. Придется отождествить два уравненія

$$(\alpha - x)(2y - 2\lambda x + \lambda p) + (\beta - y)(2x + 2\lambda y - \lambda q) = 0$$

и

$$x^2 - y^2 - a^2 + \mu(2xy - qx - py) = 0,$$

откуда

$$\mu = -\frac{1}{\lambda}, \quad p\alpha - q\beta = -2a^2, \quad 2\lambda\alpha + \lambda p = 2(\beta - q),$$
$$2\lambda\beta + \lambda q = -2(\alpha - p)$$

изъ двухъ послѣднихъ равенствъ получаемъ

$$\left(\alpha - \frac{p}{4}\right)^2 + \left(\beta - \frac{q}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}(p^2 + q^2).$$

Координаты α и β опредѣляются, какъ координаты точки пересѣченія прямой

$$px - qy + 2a^2 = 0$$

съ кругомъ

$$\left(x - \frac{p}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{q}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}(p^2 + q^2).$$

2) Точка M должна находиться внутри эллипса

$$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{2a^2} - 1 = 0.$$

3) Уравненіе линіи, описываемой точкой M при сказанномъ условіи, имѣетъ видъ

$$(x^2 - y^2 + 8a^2)^3 = 2 . 3^3 a^2 (x^2 + y^2)^2.$$

139. Найти всѣ коническія сѣченія, въ которыхъ двумъ взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ хордъ соотвѣтствуютъ два перпендикулярныхъ между собой діаметра.

Отв. Равностороннія гиперболы и круги.

140. Въ равносторонней гиперболѣ уголъ между двумя діаметрами равенъ углу между діаметрами сопряженными.

141. Данъ эллипсъ и точка $P(\alpha, \beta)$ на нормали точки $M_0(x_0, y_0)$, лежащей на эллипсѣ; изъ точки P проведены къ эллипсу четыре нормали, имѣющія основаніями точки M_0, M_1, M_2, M_3; найти уравненіе круга, проходящаго черезъ точки M_1, M_2, M_3 и доказать, что этотъ кругъ проходитъ черезъ точку M'_0. діаметрально противоположную точкѣ M_0, и черезъ основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ центра на касательную въ точкѣ M'_0 (теорема Іоахимсталя).

Отв. Обозначая черезъ x, y координаты любой изъ точекъ M_1, M_2, M_3 мы получимъ

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \quad b^2x_0^2 + a^2y_0 = a^2b^2;$$

вычитая, получаемъ

$$b^2(x^2 - x_0^2) + a^2(y^2 - y_0^2) = 0. \qquad (*)$$

Съ другой стороны, согласно задачѣ 22, получимъ

$$b^2 + \frac{a^2\alpha}{x} = a^2 + \frac{b^2\beta}{y}, \quad b^2 + \frac{a^2\alpha}{x_0} = a^2 + \frac{b^2\beta}{y_0};$$

вычитая, получимъ

$$\frac{a^2\alpha(x - x_0)}{xx_0} = \frac{b^2\beta(y - y_0)}{yy_0}; \qquad (**)$$

исключаемъ изъ уравненій (*) и (**) разности $x - x_0$ и $y - y_0$, получимъ

$$\frac{xx_0(x + x_0)}{a^4\alpha} + \frac{yy_0(y + y_0)}{b^4\beta} = 0.$$

Послѣднее уравненіе опредѣляетъ коническое сѣченіе, проходящее черезъ три точки M_1, M_2, M_3 и черезъ точку M'_0, діаметрально противоположную точкѣ M_0. Полагая

$$b^2 + \frac{a^2\alpha}{x_0} = a^2 + \frac{b^2\beta}{y_0} = h$$

получимъ

$$\frac{x(x + x_0)}{a^2}(h - a^2) + \frac{y(y + y_0)}{b^2}(h - b^2) = 0.$$

Послѣднее уравненіе опредѣляетъ коническое сѣченіе, имѣющее оси параллельныя осямъ заданнаго эллипса. Получаемъ, на основаніи задачи 116, искомый кругъ, проходящій черезъ точки M_1, M_2, M_3, M'_0:

$$x^2 + y^2 + xx_0 + yy_0 = h\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + 1\right).$$

142. Черезъ точку M на эллипсѣ можно провести три нормали къ кривой кромѣ той, которая имѣетъ своимъ основаніемъ точку M; если на этихъ трехъ нормаляхъ отложить отъ точки M отрѣзки, равные тѣмъ отрѣзкамъ этихъ нормалей, которые

образуетъ на нихъ большая ось, считая отъ основанія нормали, то три полученныя точки лежатъ на кругѣ, касающемся эллипса въ точкѣ M.

Отв. Пусть будетъ $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ уравненіе заданнаго эллипса. Кругъ Іоахимсталя (см. задачу 141) для точки M (α, β) будетъ

$$a^2b^2(x^2 + y^2) - \alpha b^4 x - \beta a^4 y - a^2b^2(a^2 + b^2) = 0.$$

Обозначая черезъ X и Y координаты точки, взятой на нормали въ точкѣ (x, y) эллипса, согласно условіямъ задачи получимъ

$$X = \alpha + \frac{b^2x}{a^2}, \quad Y = \beta + y;$$

подставляя значенія x, y изъ послѣднихъ уравненій въ предыдущія, получимъ

$$a^2(X - \alpha)^2 + b^2(Y - \beta)^2 = b^4,$$

$$a^6(X-\alpha)^2 + a^2b^4(Y-\beta)^2 - \alpha a^2b^4(X-\alpha) - \beta a^2b^2(Y-\beta) - \rho^2b^4(a^2+b^2) = 0.$$

Послѣднія два уравненія даютъ коническія сѣченія съ параллельными осями; черезъ точки ихъ пересѣченія проходитъ кругъ

$$(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 + \frac{b^2}{a^2}(X - \alpha) + (Y - \beta) = 0. \qquad (*)$$

Послѣдній кругъ проходитъ черезъ точку M и касается эллипса. Когда точка M двигается по эллипсу, центръ круга (*) описываетъ эллипсъ

$$b^2a^2x^2 + (a^2 + c^2)y^2 = \frac{(a^2 + c^2)^2}{4} b^2.$$

143. Черезъ точку 0 окружности круга проведены три хорды и на каждой, какъ на діаметрѣ, описаны круги. Эти три круга, пересѣкаясь въ точкѣ 0, пересѣкутся еще въ трехъ точкахъ, лежащихъ на одной прямой.

Отв. Возьмемъ полярныя координаты: полюсъ въ точкѣ 0, полярная ось-діаметръ круга. Уравненіе заданнаго круга есть $\rho = d \cos\theta$. Пусть діаметръ одного изъ другихъ круговъ составляетъ уголъ α съ осью; тогда его длина будетъ $d\cos\alpha$; уравненіе же этого круга будетъ $\rho = d\cos\alpha . \cos(\theta - \alpha)$. Уравненіе другого круга будетъ $\rho = d\cos\beta . \cos(\theta - \beta)$. Найти точку пересѣченія этихъ двухъ круговъ значитъ удовлетворить уравненію $\cos\alpha \cos(\theta - \alpha) = \cos\beta \cos(\theta - \beta)$. Легко видѣть, что $\theta = \alpha + \beta$, а соотвѣтствующая величина ρ будетъ $d\cos\alpha\cos\beta$. Точно также полярныя координаты точки пересѣченія круга перваго съ третьимъ будутъ:

$$\theta = \alpha + \gamma, \quad \rho = d\cos\alpha\cos\gamma.$$

Найдемъ теперь уравненіе въ полярныхъ координатахъ прямой линіи, соединяющей эти двѣ точки. Возьмемъ общее уравненіе прямой линіи

$$\rho\cos(a - \theta) = b$$

и подставимъ въ него послѣдовательно найденныя величины для θ и ρ. Получимъ

$$b = d\cos\alpha.\cos\beta.\cos[a-(\alpha+\beta)] = d\cos\alpha.\cos\gamma.\cos[a-(\alpha+\gamma)],$$

откуда

$$a = \alpha+\beta+\gamma,\quad b = d\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma.$$

Полная симметрія выраженій a и b относительно угловъ α, β, γ выражаетъ свойство геометрической фигуры, высказанное въ задачѣ.

144. Найти геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ можно провести къ параболѣ двѣ взаимно перпендикулярныя нормали.

Отв. Уравненіе параболы

$$y^2 = 2px, \tag{1}$$

уравненіе нормали въ точкѣ параболы (x, y) будетъ

$$(\xi - x)\,y + (\eta - y)\,p = 0. \tag{2}$$

Если заданы значенія ξ и η, то координаты точки на параболѣ (x, y) опредѣлятся рѣшеніемъ совмѣстно (см. зад. 22 и 23) уравненій (1) и (2). Получатся три точки пересѣченія параболы (1) съ гиперболою (2). Исключая x изъ этихъ двухъ уравненій, получимъ для y слѣдующее кубическое уравненіе:

$$y^3 - 2p(\xi - p)\,y - 2\eta p^2 = 0.$$

Три корня этого уравненія y_0, y_1, y_2 удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$y_0 + y_1 + y_2 = 0 \tag{3}$$

$$y_0y_1 + y_0y_2 + y_1y_2 = -2p(\xi - p) \tag{4}$$

$$y_0y_1y_2 = 2\eta p^2 \tag{5}$$

Условіе перпендикулярности двухъ изъ нормалей есть:

$$y_0y_1 + p^2 = 0 \text{ [см. уравн. (2)]} \tag{6}$$

Остается изъ четырехъ уравненій (3), (4), (5), (6), для полученія геометрическаго мѣста, исключить три величины y_0, y_1, y_2, что легко сдѣлать.

145. Сѣкущая обращается около неподвижной точки, взятой на оси параболы; черезъ точки, въ которыхъ она пересѣкаетъ параболу, проводимъ нормали; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія этихъ нормалей.

146. Парабола перемѣщается параллельно самой себѣ такимъ образомъ, что вершина ея описываетъ параболу въ ея начальномъ положеніи; изъ вершины неподвижной параболы проводимъ касательныя къ движущейся параболѣ; найти геометрическое мѣсто точекъ касанія.

Отв. Называя α, β координаты новой вершины параболы, имѣемъ: $\beta^2 = 2p\alpha$ (1); уравненіе подвижной параболы будетъ

$$(y-\beta)^2 = 2p\,(x-\alpha); \tag{2}$$

уравненіе касательной изъ начала:

$$-2(y-\beta)\beta-2p(x-\alpha)+2p\alpha=0; \tag{3}$$

остается изъ трехъ уравненій (1), (2) и (3) исключить α и β.

147. Найти геометрическое мѣсто такой точки, чтобы сумма квадратовъ нормалей, проведенныхъ изъ этой точки къ данной параболѣ, была постоянна.

Отв. См. задачу 144. Надо положить

$$(\xi-x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(\xi-x_1)^2+(\eta-y_1)^2+(\xi-x_2)^2+(\eta-y_2)^2=k,$$

гдѣ k постоянное число, а выраженія

$$y^2{}_0+y^2{}_1+y^2{}_2 \text{ и } y^4{}_0+y^4{}_1+y^4{}_2$$

опредѣляются черезъ коэффиціенты уравненія третьей степени по формуламъ Ньютона. Въ данномъ случаѣ

$$y^4{}_0+y^4{}_1+y^4{}_2=2(y_0y_1+y_0y_2+y_1y_2)^2.$$

148. Дана кривая второго порядка, вписанная въ уголъ; проводимъ къ этой кривой какую нибудь касательную. Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія высотъ треугольника, образуемаго движущеюся касательною и сторонами угла; найти также геометрическое мѣсто центра круга, описаннаго около того же треугольника.

Отв. Примемъ за ось x-овъ одну изъ сторонъ угла, вершину его за начало, а ось y-овъ возьмемъ перпендикулярно. При всѣхъ задачахъ, гдѣ требуется проводить перпендикуляры, можно посовѣтовать брать прямоугольныя оси координатъ, ибо тогда условіе перпендикулярности выражается проще. Уравненія касательныхъ будутъ $y=0$, $y-\lambda x=0$. Уравненіе искомаго коническаго сѣченія можно написать такъ

$$(ax+by+c)^2-y(y-\lambda x)=0, \tag{1}$$

гдѣ $ax+by+c$ есть хорда, соединяющая точки касанія касательныхъ. Уравненіе прямой напишемъ въ видѣ

$$Ay+B(y-\lambda x)+C(ax+by+c)=0. \tag{2}$$

Чтобы эта прямая была касательная, необходимо исключить изъ уравненія (1) и (2) $(ax+by+c)$ и выразить, что результатъ долженъ быть полнымъ квадратомъ; получимъ:

$$C^2=4AB,$$

откуда окончательно уравненіе касательной приметъ видъ

$$C^2y+4B^2(y-\lambda x)+4CB(ax+by+c)=0.$$

Дальнѣйшее рѣшеніе задачи не представляетъ затрудненій.

149. Данъ эллипсъ; черезъ неподвижную точку проводимъ двѣ какія нибудь взаимно перпендикулярныя прямыя и въ точкахъ, гдѣ эти прямыя пересѣкаютъ

эллипсъ, проводимъ касательныя къ этому элипсу. Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія этихъ касательныхъ.

Отв. X, Y координаты точки пересѣченія касательныхъ къ эллипсу; координаты точекъ касанія назовемъ $x_1, y_1; x_2, y_2$. Координаты неподвижной точки пусть будутъ α и β; условіе перпендикулярности напишется такъ:

$$x_1x_2 + y_1y_2 - \alpha(x_1 + x_2) - \beta(y_1 + y_2) + \alpha^2 + \beta^2 = 0;$$

но x_1 и x_2 суть корни уравненія:

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}\right) - 2\frac{x}{a}\frac{X}{a} + 1 - \frac{Y}{b^2} = 0,$$

точно также y_1 и y_2 суть корни уравненія аналогичнаго.

150. Та-же задача, когда взаимно перпендикулярныя линіи замѣнимъ прямыми, параллельными двумъ сопряженнымъ діаметрамъ другого даннаго эллипса.

Отв. Надо поставить условіе

$$A\lambda\mu + B(\lambda + \mu) + C = 0,$$

гдѣ

$$\lambda = \frac{y_1 - \beta}{x_1 - \alpha}, \quad \mu = \frac{y_2 - \beta}{x_2 - \alpha}.$$

151. Уголъ постоянной величины обращается около своей вершины, помѣщенной на данной кривой второго порядка; въ точкахъ, въ которыхъ стороны угла пересѣкаютъ кривую, проводимъ касательныя къ этой кривой. Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія этихъ касательныхъ.

152. Проводимъ какую нибудь касательную къ гиперболѣ; точки, въ которыхъ она пересѣкаетъ соотвѣтствующія асимптоты, соединяемъ съ двумя неподвижными точками. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія послѣднихъ двухъ прямыхъ.

Отв. Отнести гиперболу къ асимптотамъ.

153. Даны двѣ точки A и B; черезъ эти двѣ точки проводимъ такія двѣ двигающіяся прямыя AM и BM, чтобы уголъ MAB былъ вдвое больше угла MBA. Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія M.

154. Опредѣлить геометрическое мѣсто центровъ окружностей, которыя отсѣкають линіи данной длины на сторонахъ даннаго угла.

Отв. Возьмемъ стороны даннаго угла θ за оси координатъ. Уравненіе круга будетъ $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2\cos\theta\,(x-\alpha)\,(y-\beta) = r^2$; полагая $y = 0$ для разности корней x получимъ выраженіе: $2\sqrt{r^2 - \beta^2\sin^2\theta}$.

155. Даны двѣ неподвижныя прямыя; движущаяся прямая пересѣкаетъ первыя двѣ такъ, что составляетъ треугольникъ постоянной величины. Найти геометрическое мѣсто центровъ тяжести этихъ треугольниковъ.

Отв. Гипербола.

156. Даны неподвижная точка и неподвижная прямая; уголъ постоянной вели-

чины вращается около своей вершины, помѣщенной въ неподвижной точкѣ. Найти геометрическое мѣсто центра круга, описаннаго около треугольника, образуемаго сторонами угла и неподвижной прямой.

Отв. Гипербола.

157. Треугольникъ ABC вписанъ въ гиперболу; двѣ стороны его неподвижны; найти геометрическое мѣсто средины третьей стороны.

Отв. Гипербола.

158. На одной изъ діагоналей прямоугольника, принимаемой за хорду, описанъ кругъ. Найти мѣсто концовъ діаметровъ, параллельныхъ второй діагонали.

Отв. Гипербола.

159. Даны уголъ и неподвижная точка; черезъ послѣднюю проводимъ сѣкущую и черезъ точки, въ которыхъ эта сѣкущая встрѣчаетъ двѣ стороны угла, проводимъ прямыя, соотвѣтственно параллельныя сторонамъ угла. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія этихъ параллелей.

Отв. Гипербола.

160. Найти мѣсто такой точки, чтобы одинъ изъ биссектровъ угловъ, образуемыхъ прямыми, соединяющими эту точку съ двумя данными точками A и B, имѣлъ данное направленіе.

Отв. Гипербола.

161. Данъ эллипсъ; проводимъ два сопряженныхъ діаметра. Найти мѣсто точки пересѣченія одного изъ нихъ съ прямой, проведенной черезъ данную точку перпендикулярно къ другому или, болѣе общая задача, съ прямой, образующей со вторымъ діаметромъ данный уголъ.

Отв. Гипербола.

162. Найти геометрическое мѣсто вершинъ параллелограммовъ, построенныхъ на сопряженныхъ діаметрахъ эллипса.

Отв. Если одна изъ вершинъ параллелограмма лежитъ въ началѣ, а двѣ рядомъ лежащія вершины имѣютъ координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2), то противоположная вершина имѣетъ координаты (x_1+x_2, y_1+y_2). Искомое геометрическое мѣсто — эллипсъ.

163. Найти геометрическое мѣсто средины хордъ, проведенныхъ черезъ одну и туже точку эллипса.

Отв. Эллипсъ.

164. Хорда круга перемѣщается, оставаясь параллельною самой себѣ; черезъ концы проводимъ прямыя, параллельныя двумъ даннымъ направленіямъ. Найти мѣсто точки пересѣченія параллельныхъ линій.

Отв. Эллипсъ.

165. Прямая перемѣщается параллельно самой себѣ въ плоскости двухъ другихъ прямыхъ: найти геометрическое мѣсто такой ея точки, чтобы сумма квадратовъ разстояній этой точки отъ точки пересѣченія съ данными прямыми была постоянною.

Отв. Эллипсъ.

166. Эллипсъ вращается около своего центра; въ точкахъ, гдѣ онъ пересѣкаетъ данную прямую, проводимъ къ нему касательныя; найти мѣсто точки пересѣченія этихъ касательныхъ.

Отв. Уравненіе эллипса, отнесенное къ центру есть

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 = P\,;$$

неподвижная прямая пусть будетъ $y = b$; кромѣ того, по условію вопроса,

$$A + C = k,\ AC - B^2 = l\,,$$

гдѣ k и l постоянныя. Уравненіе эллипса можно написать въ видѣ

$$(Ax + By)^2 + ly^2 = AP\,;$$

откуда уравненіе касательной въ точкѣ x_0, y_0 будетъ

$$(Ax_0 + By_0)\,(Ax + By) + lyy_0 = AP\,.$$

Далѣе рѣшеніе не представляетъ затрудненія. Искомое геометрическое мѣсто есть кругъ.

167. Данъ кругъ и неподвижная прямая, проходящая черезъ его центръ; подвижная прямая, равная радіусу круга, опирается однимъ концомъ на окружность круга, другимъ на прямую; найти геометрическое мѣсто, описываемое какою либо точкою движущейся прямой.

Отв. Центръ круга принять за начало, неподвижную прямую за одну изъ осей координатъ. Искомое геометрическое мѣсто есть эллипсъ или кругъ, концентрическій съ заданнымъ.

168. Движущаяся плоскость перемѣщается по неподвижной плоскости такъ, что двѣ прямыя движущейся плоскости остаются соотвѣтственно касательными къ двумъ кругамъ неподвижной плоскости; найти геометрическое мѣсто, описываемое точкою неподвижной плоскости на движущейся плоскости.

Отв. Возьмемъ такія прямоугольныя координаты x, y неподвижной плоскости: центръ одного круга примемъ за начало, ось x-овъ проведемъ черезъ центръ другаго круга, абсцисса котораго пусть будетъ k. За координаты ξ, η въ движущейся плоскости примемъ двѣ касательныя.

Формулы перехода будутъ:

$$x = a + \xi \cos\alpha + \eta\cos\beta,\ y = b + \xi\sin\alpha + \eta\sin\beta \qquad (1)$$

(см. §41), гдѣ a и b—координаты новаго начала. Подвижныя оси имѣютъ въ старыхъ координатахъ уравненія

$$(x - a)\sin\beta - (y - b)\cos\beta = 0,\ (x - a)\sin\alpha - (y - b)\cos\alpha = 0.$$

Условія касанія къ даннымъ кругамъ будутъ:

$$-a\sin\beta + b\cos\beta = r\,, \qquad (2)$$

$$(k - a)\sin\alpha + b\cos\alpha = r_1\,, \qquad (3)$$

гдѣ r и r_1 радіусы круговъ. Возьмемъ нѣкоторую точку неподвижной плоскости x_0, y_0; тогда, исключивъ a и b изъ уравненій (1), (2) и (3), получимъ два уравненія вида

$$A\cos + B\sin\alpha = Q;\ A_1\cos\beta + B_1\sin\beta = Q_1,$$

гдѣ A, A_1, B, B_1 числа постоянныя, а Q и Q_1 линейныя функціи отъ ξ и η. Остается изъ двухъ послѣднихъ уравненій исключить α и β, принимая во вниманіе, что $\beta - \alpha =$ пост. Показать, что геометрическое мѣсто будетъ эллипсъ.

169. Отъ какой нибудь точки эллипса по нормали откладываемъ линію, равную $\frac{k^2}{p}$, гдѣ k есть постоянная величина, а p перпендикуляръ, опущенный изъ центра на касательную; найти геометрическое мѣсто конца этой прямой.

Отв. Легко видѣть, что $\frac{k^2}{p}$ пропорціонально діаметру параллельному къ касательной. Когда искомое мѣсто будетъ кругъ?

170. Найти геометрическое мѣсто вершины постояннаго угла, описаннаго около параболы.

Отв. Гипербола.

171. Черезъ фокусъ параболы проводимъ хорду и на хордѣ, какъ діаметрѣ, описываемъ кругъ, затѣмъ проводимъ къ кругу касательныя, параллельныя данной прямой; найти геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія.

Отв. Гипербола.

172. Постоянный уголъ вращается около фокуса кривой втораго порядка; въ точкахъ, въ которыхъ стороны угла встрѣчаютъ кривую, проводимъ къ ней касательныя; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія этихъ касательныхъ.

Отв. Возьмемъ уравненіе коническаго сѣченія въ полярныхъ координатахъ, принимая за полюсъ фокусъ:

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}.$$

Возьмемъ на этомъ коническомъ сѣченіи точку, опредѣляемую угломъ θ_0. Тогда касательная въ этой точкѣ будетъ имѣть уравненіе:

$$\frac{p}{\rho} = e\cos\theta + \cos(\theta - \theta_0).$$

Половину вращающагося угла обозначимъ черезъ α; тогда, обозначая полярныя координаты точки, принадлежащей искомому геометрическому мѣсту черезъ R и φ, получимъ уравненія:

$$\varphi = \theta_0 + \alpha,\ R = \frac{p}{e\cos(\theta_0 + \alpha) + \cos\alpha}.$$

Отсюда, исключая θ_0, получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста.

173. Найти геометрическое мѣсто фокусовъ параболъ, проходящихъ черезъ двѣ данныя точки при данномъ направленіи оси.

Отв. Уравненіе параболы представляемъ въ такомъ видѣ:

$$(ax + by + \lambda)^2 = 2P(bx - ay + \mu).$$

Координаты данныхъ точекъ пусть будутъ

$$(k, o), (-k, o).$$

Тогда

$$P = \frac{\alpha\lambda}{b}, \ \mu = \frac{b}{\alpha\lambda}(a^2k^2 + \lambda^2).$$

Дальнѣйшее рѣшеніе получимъ, принимая во вниманіе § 115.

174. Найти геометрическое мѣсто фокусовъ равностороннихъ гиперболъ, имѣющихъ директрисою ось y-овъ и отсѣкающихъ на оси x-овъ постоянный отрѣзокъ.

Отв. Уравненіе разсматриваемой гиперболы имѣетъ видъ:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 2x^2,$$

гдѣ α и β координаты фокуса. Согласно требованію задачи гипербола должна проходить черезъ точку:

$$x = a, \ y = o.$$

Уравненіе искомаго геометрическаго мѣста имѣетъ видъ:

$$(a - \alpha)^2 + \beta^2 = 2a^2.$$

175. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, проходящихъ черезъ данную точку и отсѣкающихъ отъ данной прямой отрѣзокъ данной длины.

Отв. Парабола.

176. Къ эллипсамъ:

$$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1,$$

гдѣ k перемѣнный параметръ, проведены касательныя изъ точки, лежащей на большой оси. Найти геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія этихъ касательныхъ.

Отв. Кругъ.

177. Найти геометрическое мѣсто центровъ равныхъ равностороннихъ гиперболъ, проходящихъ черезъ двѣ данныя точки.

Отв. Уравненіе гиперболы можно представить въ видѣ

$$(x - \alpha)^2 + 2\lambda(x - \alpha)(y - \beta) - (y - \beta)^2 - p = 0,$$

гдѣ α и β координаты центра. Условіе постоянства длины дѣйствительной оси гиперболы есть:

$$\frac{p}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = a.$$

Дальнѣйшее рѣшеніе уже не представляетъ затрудненій.

178. Найти геометрическое мѣсто полюсовъ такихъ хордъ параболы, нормали въ концахъ которыхъ пересѣкаются на этой параболѣ.

Отв. Назовемъ черезъ α и β координаты какой нибудь точки искомаго геометрическаго мѣста. Уравненіе поляры будетъ:

$$y\beta = p\,(x + \alpha).$$

Назовемъ черезъ ξ и η координаты точки встрѣчи нормалей въ концахъ хорды; тогда получимъ координаты концовъ хорды, рѣшая относительно x и y уравненія:

$$xy + y\,(p - \xi) - p\eta = 0 \text{ и } y^2 - 2px = 0\,,$$

причемъ имѣетъ мѣсто условіе: $\eta^2 = 2p\xi$. Обозначая черезъ y_1 и y_2 ординаты концовъ хорды, получимъ слѣдующее уравненіе для ихъ опредѣленія: $y^2 + y\eta + 2p^2 = 0$. Уравненіе хорды имѣетъ видъ: $\dfrac{Y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{X - x_1}{x_2 - x_1}$, отсюда $Y = \dfrac{2pX + y_1 y_2}{y_1 + y_2}$. Далѣе, $\beta = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, $\dfrac{p\alpha}{\beta} = \dfrac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}$ и окончательно: $\alpha = p$.

179. Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія касательныхъ въ концахъ сопряженныхъ діаметровъ эллипса.

Отв. См. § 197.

180. Найти геометрическое мѣсто вершинъ гиперболъ, имѣющихъ общими одну асимптоту и одинъ фокусъ.

Отв. Примемъ асимптоту за ось y-овъ, а фокусъ возьмемъ на оси x-овъ. Общій видъ уравненія гиперболы будетъ

$$(x - a)^2 + y^2 = (mx + y)^2\,,$$

гдѣ a — заданная абсцисса фокуса, а m — перемѣнный параметръ, черезъ исключеніе котораго получается искомое уравненіе.

181. Найти геометрическое мѣсто фокусовъ параболъ, имѣющихъ общую вершину A и общую касательную MT.

Отв. Возьмемъ уравненіе параболы въ простѣйшемъ видѣ:

$$y^2 = 2px\,.$$

Повернемъ оси координатъ на уголъ α, тогда уравненіе параболы будетъ:

$$(- X \sin\alpha + Y \cos\alpha)^2 = 2p\,(X \cos\alpha + Y \sin\alpha)\,.$$

Чтобы эта парабола касалась заданной прямой:

$$Y = -b\,,$$

необходимо, чтобы удовлетворялось условіе:

$$\sin^2\alpha\,(b^2 \cos^2\alpha + 2pb \sin\alpha) - (b \cos\alpha \sin\alpha - p \cos\alpha)^2 = 0 \ (*).$$

Обозначая координаты точки, принадлежащей искомому геометрическому мѣсту, черезъ ξ, η, получимъ:

$$\xi = \frac{p}{2} \cos \alpha, \; \eta = \frac{p}{2} \sin \alpha \; .$$

Исключая уголъ α при помощи условія (*), получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста.

182. Найти геометрическое мѣсто полюсовъ данной прямой по отношенію къ кругамъ, касающимся одной прямой и имѣющимъ центры на другой данной прямой.

Отв. Примемъ точку встрѣчи данныхъ прямыхъ за начало координатъ, прямую, которой круги должны касаться, за ось x-овъ; тогда уравненіе измѣняющагося положеніе круга будетъ имѣть видъ:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\alpha a y + \alpha^2 = 0,$$

гдѣ α абсцисса центра, a — величина заданная. Сравнивая уравненіе третьей заданной прямой $Ax + By + C = 0$ съ уравненіемъ поляры, получимъ два уравненія, исключая изъ которыхъ перемѣнный параметръ α, получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста.

183. Найти геометрическое мѣсто вершинъ гиперболъ, имѣющихъ общую асимптоту и общую директрису.

Отв. Обозначая черезъ α и β координаты фокуса гиперболы, взявъ заданную асимптоту за ось y-овъ и представляя уравненіе заданной директрисы въ видѣ

$$lx + my + n = 0,$$

получимъ уравненіе гиперболы въ такомъ видѣ:

$$[(1 - l^2)\, x \mp 2ly - 2\,(\alpha - ln)]\, x + \alpha^2 = 0.$$

При нахожденіи уравненія искомаго геометрическаго мѣста придется исключить параметръ α.

184. Даны двѣ прямыя AB и CD, пересѣкающіяся подъ прямымъ угломъ; найти геометрическое мѣсто фокусовъ гиперболъ, имѣющихъ прямую AB асимптотою и касающихся CD въ точкѣ P.

Отв. Возьмемъ касательную за ось x-овъ, а асимптоту за ось y-овъ; пусть точка P имѣетъ абсциссу: $x=a$. Тогда уравненіе $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (lx+my+n)^2$ опредѣлитъ гиперболу, имѣющую фокусомъ точку (α, β) и мы получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста черезъ исключеніе l, m, n изъ четырехъ уравненій

$$(a - \alpha)^2 + \beta^2 = (la + n)^2, \; m = \pm 1, \; \beta = \mp n, \; l\alpha^2 + 2n\alpha + ln^2 = 0.$$

185. Даны три точки A, B, C; черезъ A проведена прямая AA'. Найти геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія касательныхъ, параллельныхъ AA', касающихся къ коническимъ сѣченіямъ, проходящимъ черезъ B и C и касающихся прямой AA' въ точкѣ A.

Отв. Возьмемъ прямую AA' за ось x-овъ и начало координатъ въ точкѣ A. Уравненіе разсматриваемыхъ коническихъ сѣченій будетъ:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey = 0 \text{ (см. зад. 24)}.$$

То, что коническія сѣченія должны проходить черезъ двѣ точки, даетъ условія:

$$Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Eb = 0 \qquad (1)$$

$$Aa_1^2 + 2Ba_1 b_1 + Cb_1^2 + 2Eb_1 = 0. \qquad (2)$$

Обозначимъ черезъ ξ и η координаты точки касанія касательной; тогда уравненіе касательной будетъ $Ax\xi + B(x\eta + y\xi) + Cy\eta + E(y + \eta) = 0$; условіе параллельности касательной и оси x-овъ выразится такъ: $A\xi + B\eta = 0$ (3). Остается еще условіе $A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2E\eta = 0$ (4). Исключая изъ уравненій (1), (2), (3), (4) коэффиціенты A, B, C, E, получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣсто, которое будетъ коническое сѣченіе (гипербола).

186. Найти геометрическое мѣсто вершинъ коническихъ сѣченій, полученныхъ при рѣшеніи предыдущей задачи, въ предположеніи, что прямая AA' вращается около точки A. (Ecole normale, 1863).

187. Показать, что четыре точки пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій, вписанныхъ въ данный прямоугольникъ, суть вершины параллелограмма, стороны котораго параллельны двумъ даннымъ направленіямъ; 2) найти мѣсто точекъ прикосновенія касательныхъ, проведенныхъ изъ данной точки ко всѣмъ коническимъ сѣченіямъ, вписаннымъ въ данный прямоугольникъ, или касательныхъ, параллельныхъ данному направленію; 3) найти мѣсто точки всѣхъ этихъ коническихъ сѣченій, въ которой касательная образуетъ данный уголъ съ діаметромъ, проходящимъ черезъ точку прикосновенія. (Concours général, 1866).

188. Даны прямыя AB и CD, пересѣкающіяся подъ прямымъ угломъ; разсматриваются гиперболы, имѣющія AB асимптотою и касающіяся CD въ точкѣ P. Найти: 1) мѣсто точки пересѣченія другой асимптоты съ перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ точки P на директрису; 2) мѣсто встрѣчи этой другой асимптоты съ прямою, соединяющею фокусъ съ точкой пересѣченія 0 обѣихъ данныхъ прямыхъ. (Ecole normale, 1867).

189. Даны прямоугольный треугольникъ BOA и прямая D. 1) Найти общее уравненіе равностороннихъ гиперболъ, описанныхъ около треугольника BOA. 2) Найти уравненіе мѣста L точекъ, въ которыхъ эти различныя гиперболы имѣютъ касательныя, параллельныя прямой D. 3) Изслѣдовать различные виды мѣста L, соотвѣтствующіе различнымъ направленіямъ прямой D. (Ecole polytechnique, 1867).

190. Даны кругъ и точка A. Найти геометрическое мѣсто центровъ равностороннихъ гиперболъ, проходящихъ черезъ данную точку A и касающихся даннаго круга въ двухъ точкахъ. Изслѣдовать полученную кривую для различныхъ поло-

женій точки A и доказать, что, въ общемъ случаѣ, точки прикосновенія касательныхъ, которыя можно провести къ геометрическому мѣсту изъ точки A, расположены по окружности нѣкотораго круга (Ecole polytechnique. 1873).

Отв. Пусть заданный кругъ будетъ $x^2+y^2-1=0$ и координаты данной точки α и β. Уравненіе гиперболы, имѣющей двойное касаніе къ данному кругу, будетъ:

$$x^2+y^2-1-(ax+by+c)^2=0.$$

Условіе равносторонности гиперболы будетъ: $a^2+b^2=2$. Условіемъ того, чтобы гипербола проходила черезъ точку A является уравненіе:

$$\alpha^2+\beta^2-1-(a\alpha+b\beta+c)^2=0.$$

Обозначая черезъ ξ и η координаты центра, получимъ для опредѣленія ихъ два уравненія:

$$\xi-(a\xi+b\eta+c)\,a=0,\ \eta-(a\xi+b\eta+c)\,b=0.$$

Дальнѣйшее рѣшеніе задачи не представляетъ особенныхъ затрудненій, если примемъ въ соображеніе, что условіемъ прохожденія касательной черезъ точку A является уравненіе:

$$(\alpha-x)\frac{df}{dx}+(\beta-y)\frac{df}{dy}=0 \qquad (1)$$

гдѣ

$$f(x,y)=0 \qquad (2)$$

есть уравненіе искомаго геометрическаго мѣста. Комбинируя уравненія (1) и (2) легко убѣдиться въ справедливости высказаннаго въ задачѣ утвержденія.

191. Черезъ три вершины прямоугольнаго треугольника проведены параболы; къ этимъ параболамъ проводимъ касательныя, параллельныя гипотенузѣ даннаго треугольника. 1) Найти геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія. 2) Искомое мѣсто есть коническое сѣченіе, пересѣкающее каждую параболу въ четырехъ точкахъ; найти геометрическое мѣсто центра тяжести треугольника, образованнаго общими сѣкущими, непроходящими черезъ начало. (Ecole normale, 1874).

192. Найти геометрическое мѣсто центра эллипса постоянныхъ размѣровъ, проходящаго черезъ данную точку, фокальная ось котораго проходитъ черезъ другую данную точку.

Отв. Можно посовѣтовать рѣшать эту задачу при помощи преобразованія координатъ.

193. Найти геом. мѣсто точки прикосновенія касательныхъ, проведенныхъ изъ точки P къ коническимъ сѣченіямъ, проходящимъ черезъ четыре точки.

Отв. См. зад. 1 и 190. Подлежитъ исключенію коэффиціентъ B.

194. Найти геометрическое мѣсто центра эллипса съ постоянной площадью, описаннаго около треугольника.

Отв. Уравненіе эллипса, координаты центра котораго α и β, имѣетъ видъ:

$$A(x-\alpha)^2+2B(x-\alpha)(y-\beta)+C(y-\beta)^2=1. \qquad (*)$$

Выражая условія того, чтобы эллипсъ проходилъ черезъ три точки (0, 0) (a, 0) (0, b), получаемъ три равенства:

$$A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2=1, \qquad (1)$$

$$A(a-\alpha)^2-2B(a-\alpha)\beta+C\beta^2=1, \qquad (2)$$

$$A\alpha^2-2B(b-\beta)\alpha+C(b-\beta)^2=1. \qquad (3)$$

Вычитая (1) изъ (2) и (1) изъ (3), можемъ условія (2) и (3) замѣнить двумя слѣдующими: $\frac{Aa}{2}=A\alpha+B\beta$ (4), $\frac{Cb}{2}=B\alpha+C\beta$ (5). Условія (4) и (5) позволяютъ выразить A и C черезъ B. Подставляя полученныя выраженія въ условіе (1), мы опредѣлимъ B, а слѣдовательно, A и C. Остается выразить условіе постоянства площади, что легко сдѣлать, принимая въ соображеніе, что площадь эллипса

$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{m^2}=1$$

имѣетъ видъ: πlm. (см. § 18. Геом. трехъ изм.). Мы замѣчаемъ, что уравненіе (*) послѣ разложенія на сумму квадратовъ принимаетъ видъ:

$$L[A(x-\alpha)+B(y-\beta)]^2+[L(y-\beta)]^2=P,$$

гдѣ $P=LA$, а $L=AC-B^2$. Оси l и m выражаются на основаніи § 151 формулами: $l=\sqrt{\frac{P}{A_1AL}}$, $m=\sqrt{\frac{P}{AC_1L}}$; отсюда $lm=\frac{1}{\sqrt{A_1C_1}}$, гдѣ A_1 и C_1 суть корни квадратнаго уравненія (см. § 149). Произведеніе корней

$$\sin^2\theta\, A_1C_1=AC-B^2.$$

Слѣдовательно, искомая площадь эллипса выразится формулой: $\frac{\pi \sin\theta}{\sqrt{AC-B^2}}$, гдѣ θ уголъ между осями координатъ (см. § 299).

195. Найти геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія касательныхъ, проведенныхъ изъ данной точки къ равностороннимъ гиперболамъ, касающимся трехъ сторонъ даннаго треугольника.

Отв. Можно посовѣтовать выбрать за оси координатъ двѣ стороны даннаго треугольника.

196. Данъ кругъ C, центръ котораго лежитъ на оси y, и рядъ окружностей, касающихся оси x-овъ въ началѣ; найти геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія къ этимъ окружностямъ касательныхъ, общихъ данному кругу и даннымъ окружностямъ.

Отв. Назовемъ ординату центра даннаго круга черезъ a, его радіусъ черезъ R. Тогда искомое геометрическое мѣсто разбивается на двѣ кривыя, опредѣляемыя уравненіями:

$$(a+y+R)x^2-(a-y-R)y^2=0,\ (a+y-R)x^2-(a-y+R)y^2=0.$$

197. Найти геометрическое мѣсто основаній нормалей, проведенныхъ изъ данной точки къ системѣ подобныхъ, подобно-расположенныхъ и концентрическихъ эллипсовъ.

Отв. Уравненіе системы заданныхъ эллипсовъ можетъ быть написано такъ:

$$\frac{x^2}{k^2a^2}+\frac{y^2}{k^2b^2}=1.$$

Дальнѣйшее рѣшеніе задачи не представляетъ затрудненій, если принять въ соображеніе задачу 22.

198. Найти геометрическое мѣсто вершинъ параболъ, вписанныхъ въ прямоугольный треугольникъ.

Отм. См. зад. 2, 106. Координаты вершины параболъ суть:

$$\xi=\frac{ab}{(a^2+b^2)^2}b^3,\ \eta=\frac{ab}{(a^2+b^2)^2}a^3.$$

Исключая a и b изъ этихъ друхъ равенствъ и условія:

$$an+bm=ab,$$

получаемъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста.

199. Найти геометрическое мѣсто основаній нормалей, опущенныхъ изъ вершины прямого угла треугольника, въ который вписаны параболы.

Отв. Принимая условія предыдущей задачи, замѣчаемъ, что придется исключать a и b при помощи уравненія нормали, проходящей черезъ начало координатъ и имѣющаго видъ:

$$xy\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+(x^2-y^2)\frac{1}{ab}+\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=0.$$

200. Данъ треугольникъ ABC и эллипсъ, имѣющій фокусами точки B и C; найти геометрическое мѣсто другого фокуса эллипса, вписаннаго въ треугольникъ ABC, одинъ фокусъ котораго находится на данномъ эллипсѣ.

Отв. Уравненіе заданнаго эллипса пусть будетъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Пусть tg-сы угловъ, составляемыхъ другими сторонами треугольника съ основаніемъ, принятымъ за ось х-овъ, будетъ A и B. Тогда, обозначая координаты фокуса вписаннаго эллипса, лежащаго на данномъ эллипсѣ, черезъ x и y, а другого фокуса черезъ ξ и η, замѣчаемъ, что, если соединимъ оба фокуса съ вершинами треугольника, то, на основаніи зад. 32, эти послѣднія линіи будутъ равно наклонены къ соотвѣтствующимъ сторонамъ треугольника. Тангенсы угловъ, составляемыхъ съ осью х-овъ прямыми, проведенными черезъ оба фокуса вписаннаго эллипса къ фокусу $(+c, o)$, будутъ $\dfrac{y}{x-c}$ и $\dfrac{\eta}{\xi-c}$; что касается другого фокуса, то *tang*-сы будутъ $\dfrac{y}{x+c}$ и $\dfrac{\ }{\xi+c}$. Обозначимъ теперь черезъ $\varphi(\xi,\eta)$ функцію; $\dfrac{A(\xi-c)-\eta}{\xi-c+A\eta}$, а черезъ $\psi(\xi,\eta)$ функцію $\dfrac{B(\xi+c)-\eta}{\xi+c+B\eta}$, получимъ, слѣдующихъ два равенства: $\dfrac{y}{x-c}=\varphi(\xi,\eta)$, $\dfrac{y}{x+c}=\psi(\xi,\eta)$. Опредѣляя изъ этихъ уравненій x и y черезъ ξ и η и подставляя въ уравненіе заданнаго эллипса, получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста.

Общія свойства коническихъ сѣченій.

Сокращенный способъ.

234. Подобно тому, какъ мы примѣняли сокращенный способъ при рѣшеніи задачъ на прямую, можно разсматривать и коническія сѣченія. Пусть будутъ $S=o$, $S'=o$ уравненія двухъ линій второго порядка. Покажемъ, что двѣ кривыя 2-го порядка пересѣкаются въ четырехъ точкахъ. Чтобы найти координаты точекъ пересѣченія, необходимо рѣшить относительно x и y два уравненія.

$$S=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=o$$

$$S'=a'x^2+2b'xy+c'y^2+2d'x+2e'y+f'=o$$

Эти уравненія можно переписать такъ

$$\left.\begin{array}{l} cy^2+2Uy+V=o \\ c'y^2+2U'y+V'=o \end{array}\right\} \qquad (1)$$

гдѣ $U=bx+e$, $V=ax^2+2dx+f$, $U'=b'x+e'$, $V'=a'x^2+2d'x+f'$.

Исключимъ изъ системы (1) y. Умножая первое уравненіе на c', а второе на c и вычитая, получимъ

$$2\,(cU'-c'U)\,y+V'c-c'V=o \qquad (2)$$

Умножая первое изъ уравненій (1) на V', второе-же на V, вычитая и сокращая на y, получимъ

$$(V'c-c'V)\,y+2\,(UV'-U'V)=o \qquad (3)$$

Исключая изъ уравненій (2) и (3) y, мы получимъ

$$4\,(cU'-c'U)\,(UV'-U'V)-(V'c-c'V)^2=o.$$

Подставляя въ послѣднее уравненіе вмѣсто U, V, U', V' ихъ выраженія черезъ x и раскрывая скобки, мы получимъ уравненіе 4-ой степени относительно x

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=o \qquad (4)$$

гдѣ A, B, C, D, E выражаются черезъ коэффиціенты заданныхъ уравненій.

235. Итакъ, мы видимъ, что два коническихъ сѣченія пересѣкаются въ четырехъ точкахъ, четыре абсциссы которыхъ получаются, какъ корни уравненія (4).

Изъ алгебры извѣстно, что уравненія съ дѣйствительными коэффиціентами могутъ имѣть мнимые корни, причемъ эти корни должны входить въ четномъ числѣ и быть по парно сопряженными, т. е. каждая пара мнимыхъ корней имѣетъ видъ $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$; отсюда мы заключаемъ, что уравненіе (4) имѣетъ или всѣ четыре дѣйствительныхъ корня, или же два корня дѣйствительные, а два мнимые, или же наконецъ всѣ четыре корня мнимые.

Каждый дѣйствительный корень уравненія (4) даетъ абсциссу точки пересѣченія заданной пары коническихъ сѣченій, соотвѣтствующая ордината точки пересѣченія получается черезъ рѣшеніе относительно y уравненія (2) или (3).

Изъ сказаннаго мы заключаемъ, что два коническихъ сѣченія или не пересѣкаются, или же пересѣкаются въ 2-хъ или 4-хъ точкахъ. Первый случай имѣетъ мѣсто, когда всѣ корни уравненія (4) мнимые, второй когда два вещественные и наконецъ третій, когда всѣ четыре корня вещественные.

Если мы будемъ вводить въ разсмотрѣніе мнимыя точки, т. е. точки, координаты которыхъ мнимыя, то можемъ утверждать, что каждая пара коническихъ сѣченій пересѣкается въ четырехъ точкахъ.

236. Уравненіе (1) $S-kS'=o$ при различныхъ k опредѣляетъ, очевидно, различныя коническія сѣченія, проходящія черезъ четыре точки пересѣченія коническихъ сѣченій $S=o$, $S'=o$ и даетъ при разныхъ k такъ называемый *пучекъ* коническихъ сѣченій, проходящихъ черезъ эти четыре точки.

237. Число k можно подобрать такъ, чтобы уравненіе (1) представляло двѣ прямыя.

Условіе обращенія коническаго сѣченія

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=o$$

въ систему двухъ прямыхъ состоитъ, какъ мы уже видѣли (см. § 88), въ равенствѣ нулю дискриминанта

$$ACF+2BDE-AE^2-CD^2-FB^2.$$

Назовемъ дискриминантъ уравненія $S-k\,S'=o$, черезъ D, а дискриминанты уравненій $S=o$ и $S'=o$ черезъ Δ и Δ', тогда

$$D=(a-ka')(c-kc')(f-kf')+2(b-kb')(d-kd')(e-ke')-\ldots=$$
$$=\Delta+k\Theta+k^2\Theta'+k^3\Delta'=o \qquad (*)$$

Уравненіе (*) даетъ для k три значенія k_1, k_2, k_3, изъ которыхъ по крайней мѣрѣ одно вещественное, какъ это извѣстно изъ алгебры.

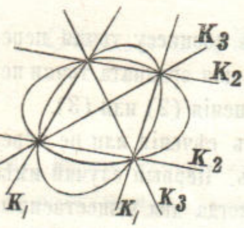
Когда всѣ три корня вещественные, тогда могутъ существовать три дѣйствительныхъ пары прямыхъ линій

$$S-k_1\,S'=o,\ S-k_2\,S'=o,\ S-k_3\,S'=o, \qquad (**)$$

представляющихъ нечто иное, какъ полный четыреугольникъ, составляемый четырьмя точками пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій $S=o$ и $S'=o$ (см. черт. 123).

Прямыя (**) называются хордами пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій $S=o$, $S'=o$.

238. У каждыхъ двухъ коническихъ сѣченій существуютъ всегда по крайней мѣрѣ двѣ дѣйствительныя изъ числа хордъ пересѣченія. Если заданныя кон. сѣченія пересѣкаются въ четырехъ точкахъ, то и двѣ другія пары хордъ будутъ дѣйствительныя. Въ случаѣ если коническія сѣченія не пересѣкаются, то одна пара хордъ существуетъ, двѣ остальныя пары мнимыя, но точки пересѣченія хордъ, составляющихъ каждую изъ паръ (**) всѣ три дѣйствительныя. Наконецъ, въ случаѣ двухъ точекъ пересѣченія существуетъ только одна точка пересѣченія дѣйствительной пары хордъ, двѣ же другія пары съ ихъ точками пересѣченія мнимыя.



Черт. 123.

Чтобы доказать справедливость сказаннаго, мы разсмотримъ мнимыя точки и мнимыя прямыя. (См. § 52).

Двѣ мнимыя точки мы будемъ называть сопряженными, если у нихъ абсциссы и ординаты суть мнимыя сопряженныя. Такъ напр. точки M_1 $(x_1\ y_1)$, $M_2(x_2\ y_2)$ суть мнимыя сопряженныя, если

$$\left.\begin{aligned} x_1=\alpha+\beta\sqrt{-1},\ y_1=\gamma+\delta\sqrt{-1} \\ x_2=\alpha-\beta\sqrt{-1},\ y_2=\gamma-\delta\sqrt{-1} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Уравненіе прямой, проходящей черезъ двѣ дѣйствительныя точки, какъ мы видѣли, писалось въ видѣ

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2} \qquad (^*)$$

Условимся подъ прямою, проходящею черезъ двѣ мнимыя точки разумѣть прямую, опредѣляемую уравненіемъ (*). Легко показать, что когда точки M_1 и M_2 мнимыя сопряженныя, то уравненіе прямой, проходящей черезъ нихъ, не будетъ заключать мнимыхъ коэффиціентовъ; въ самомъ дѣлѣ, подставляя въ уравненіе (*) выраженія (1), получимъ

$$\frac{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}{2\beta\sqrt{-1}}=\frac{y-\gamma+\delta\sqrt{-1}}{2\delta\sqrt{-1}}$$

откуда окончательно

$$\frac{x-\alpha}{\beta}=\frac{y-\gamma}{\delta} \qquad (2)$$

Итакъ, мы видимъ, что черезъ двѣ мнимыя сопряженныя точки (1) проходитъ одна дѣйствительная прямая (2).

Условимся говорить, что уравненіе

$$(A+\sqrt{-1}\,A_1)\,x+(B+\sqrt{-1}\,B_1)\,y+C+\sqrt{-1}\,C_1=0$$

опредѣляетъ нѣкоторую, такъ называемую мнимую, прямую.

Двѣ мнимыя прямыя:

$$\left.\begin{aligned}(A+A_1\sqrt{-1})\,x+(B+B_1\sqrt{-1})\,y+C+C_1\sqrt{-1}=0\\(A-A_1\sqrt{-1})\,x+(B-B_1\sqrt{-1})\,y+C-C_1\sqrt{-1}=0\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

называются сопряженными.

Легко доказать, что двѣ сопряженныя мнимыя прямыя пересѣкаются въ дѣйствительной точкѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (3) можно переписать такъ

$$Ax+By+C+\sqrt{-1}\,(A_1x+B_1y+C_1)=0$$

$$Ax+By+C-\sqrt{-1}\,(A_1x+B_1y+C_1)=0$$

откуда видно, что они оба удовлетворяются координатами точки пересѣченія дѣйствительныхъ прямыхъ

$$Ax+By+C=0$$
$$A_1x+B_1y+C_1=0;$$

эта дѣйствительная точка и есть точка пересѣченія сопряженныхъ прямыхъ.

239. Замѣтивъ это, покажемъ справедливость высказаннаго относительно хордъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій.

Если всѣ четыре точки мнимыя, то ихъ координаты очевидно будутъ имѣть видъ:

$$M_1\,(\alpha_1+\beta_1 i,\ \gamma_1+\delta_1 i),\ \ M_2\,(\alpha_1-\beta_1 i,\ \gamma_1-\delta_1 i),\ \ M_3\,(\alpha_2+\beta_2 i,\ \gamma_2+\delta_2 i),$$
$$M_4\,(\alpha_2-\beta_2 i,\ \gamma_2-\delta_2 i)$$

и двѣ хорды M_1M_2, M_3M_4 будутъ дѣйствительныя, что же касается двухъ другихъ паръ хордъ, то онѣ будутъ имѣть уравненіями:

$$L\pm Mi=0,\ \ L'\pm M'i=0$$

и дадутъ въ пересѣченіи каждая пара по одной дѣйствительной точкѣ

$$(L=0,\ M=0);\ (L'=0,\ M'=0).$$

Итакъ, три точки пересѣченія паръ хордъ дѣйствительныя.

Если же коническія сѣченія пересѣкаются въ двухъ дѣйствительныхъ точкахъ, то изъ шести хордъ двѣ будутъ дѣйствительныя, именно тѣ, которыя соединяютъ двѣ дѣйствительныя точки и двѣ точки мнимыя сопряженныя, остальныя четыре хорды будутъ мнимыя; и такъ какъ каждая изъ остальныхъ проходитъ черезъ дѣйствительную точку, то онѣ не могутъ имѣть другихъ дѣйствительныхъ точекъ.

Въ этомъ случаѣ изъ трехъ точекъ пересѣченія паръ хордъ одна дѣйствительная, именно та, которая лежитъ на пересѣченіи дѣйствительныхъ хордъ; другія же двѣ мнимыя.

Случай трехъ дѣйствительныхъ точекъ есть тотъ случай, когда уравненіе (*) § 237 даетъ для k три вещественныхъ корня.

Остается указать, чѣмъ будетъ отличаться случай шести дѣйствительныхъ хордъ отъ остальныхъ.

Разлагаемъ первую часть уравненія $S - k\,S' = 0$ на сумму квадратовъ; пусть полученное уравненіе имѣетъ видъ

$$L\alpha^2 + \beta^2 - P = 0, \tag{1}$$

гдѣ $P = LN - M^2$ (см. § 96) и, слѣдовательно,

$$P = (AC - B^2)(AF - D^2) - (AE - BD)^2 = AD,$$

гдѣ D дискриминантъ. Но мы k нашли изъ уравненія $D = 0$, причемъ для k получили три вещественныхъ рѣшенія, слѣдовательно, уравненіе (1) имѣетъ видъ $L\alpha^2 + \beta^2 = 0$.

Въ этомъ уравненіи $L = (a - ka')(c - kc') - (b - kb')^2$. Если $L < 0$, то уравненіе (1) даетъ двѣ дѣйствительныя хорды при разсматриваемомъ значеніи для k, а если $L > 0$, то хорды мнимыя, пересѣкающіяся въ точкѣ $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

240. Мы получимъ уравненіе совокупности шести хордъ, если исключимъ k изъ уравненій $S - kS' = 0$ и $\Delta + \Theta k + \Theta' k^2 + \Delta' k^3 = 0$; получается уравненіе шестой степени

$$\Delta . S'^3 + \Theta . S'^2 . S + \Theta' . S' . S^2 + \Delta' S^3 = 0.$$

241. Если $\Delta = 0$, т. е., если $S = 0$ представляетъ систему двухъ прямыхъ, то уравненіе $\Delta + \Theta k + \Theta' k^2 + \Delta' k^3 = 0$ (*) даетъ для k одно значеніе равное нулю, напр. $k_1 = 0$, двѣ изъ числа хордъ опредѣляются въ этомъ случаѣ уравненіемъ $S = 0$. Если $\Delta' = 0$, то $k_1 = \infty$ и одна пара хордъ опредѣляется уравненіемъ $S' = 0$.

242. На основаніи замѣчаній предыдущаго параграфа мы видимъ, что уравненіе

$$S - k\,\alpha\,\beta = 0,$$

гдѣ $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ суть уравненія двухъ прямыхъ, опредѣлитъ коническое сѣченіе, имѣющее съ коническимъ сѣченіемъ $S = 0$ хордами пересѣченія прямыя $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, другими словами, коническое сѣченіе, проходящее черезъ четыре точки сѣченія кривой $S = 0$ прямыми $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

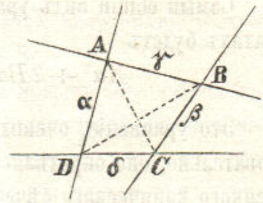
243. Если будетъ въ одно время $\Delta = 0$, $\Delta' = 0$, то $k_1 = 0$, $k_2 = \infty$, а k_3 опредѣлится изъ уравненія

$$\Theta + k_3\,\Theta' = 0. \tag{1}$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе $S - kS' = 0$ имѣетъ видъ (2) $\alpha\beta - k\gamma\,\delta = 0$ и при разныхъ k опредѣляетъ коническія сѣченія, проходящія черезъ четыре точки A, B, C, D (см. черт. 124) пересѣченія прямыхъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$. Если же мы подставимъ въ уравненіе (2) то значеніе k, которое получается изъ уравненія (1), то получимъ уравненіе

$$\Theta' \alpha \beta + \Theta \gamma \delta = 0$$

опредѣляющее совокупность діагоналей AC и BD.



Черт. 124.

Задачи.

1) Найти уравненіе коническаго сѣченія, проходящаго черезъ точки пересѣченія даннаго коническаго сѣченія $S = 0$ съ осями координатъ.

Отв. $S - kxy = 0$.

2) Найти уравненіе коническаго сѣченія, проходящаго черезъ пять данныхъ точекъ.

Отв. Составить уравненія $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ сторонъ четыреугольника, имѣющаго вершинами четыре изъ числа точекъ. Уравненіе искомаго коническаго сѣченія будетъ $\alpha\gamma = k\beta\delta$. Остается подобрать k такъ, чтобы послѣднему уравненію удовлетворяли координаты пятой точки.

3) Написать уравненіе коническаго сѣченія, проходящаго черезъ 5 точекъ (1, 2), (3, 5), (—1, 4), (—3, —1), (—4, 3).

Отв. Разсматривая четыреугольникъ, составленный четырьмя первыми точками видимъ, что уравненіе должно быть

$$(3x - 2y + 1)(5x - 2y + 13) = k(x - 4y + 17)(3x - 4y + 5).$$

Подставляя въ него координаты (—4, 3) пятой точки, получимъ $k = -\dfrac{22}{19}$ откуда окончательно

$$79x^2 - 320xy + 301y^2 + 1101x - 1665y + 1586 = 0.$$

244. Мы видѣли уже, что уравненіе $S - k\alpha\beta = 0$ опредѣляетъ коническое сѣченіе S', имѣющее съ даннымъ S хорды пересѣченія PQ и pq (см. черт. 125), опредѣляемыя уравненіями $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Приближая хорду pq ($\beta = 0$) до совпаденія съ хордою PQ, получимъ уравненіе $S - k\alpha^2 = 0$ коническаго сѣченія, касающагося въ двухъ концахъ хорды PQ съ заданнымъ коническимъ сѣченіемъ (см. черт. 126).

Если коническое сѣченіе $S = 0$ распадается на двѣ прямыя, то мы замѣтимъ, что уравненіе

$$\beta\gamma - k\alpha^2 = 0$$

опредѣляетъ коническое сѣченіе, касающееся двухъ прямыхъ $\beta = 0$ и $\gamma = 0$ въ точкахъ B и C, въ которыхъ эти прямыя пересѣкаетъ хорда $\alpha = 0$ (см. черт. 127).

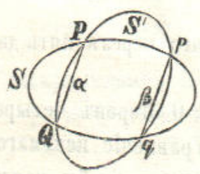
Уравненіе коническаго сѣченія $\beta\gamma - k\alpha^2 = 0$, отнесенное къ двумъ касательнымъ $\beta = 0$, $\gamma = 0$ и хордѣ касанія $\alpha = 0$, есть частный случай коническаго сѣченія, выраженнаго въ трилинейныхъ координатахъ.

245. Пусть треугольникъ трилинейной системы состоитъ изъ прямыхъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

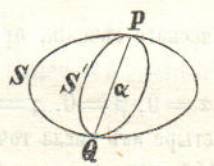
Самый общій видъ уравненія коническаго сѣченія въ трилинейныхъ координатахъ будетъ

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + 2D\alpha\gamma + 2E\beta\gamma + F\gamma^2 = 0. \qquad (1)$$

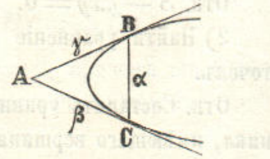
Это уравненіе, очевидно, второй степени относительно координатъ x, y и, слѣдовательно, оно опредѣляетъ нѣкоторое коническое сѣченіе и наоборотъ, уравненіе всякого коническаго сѣченія можетъ быть написано въ видѣ (1). Въ самомъ дѣлѣ,



Черт. 125.



Черт. 126.



Черт. 127.

это уравненіе заключаетъ пять произвольныхъ отношеній пяти изъ числа коэффиціентовъ къ шестому и, слѣдовательно, можно опредѣлить эти отношенія подъ условіемъ, чтобы коническое сѣченіе проходило черезъ 5 заданныхъ точекъ; отсюда мы заключаемъ, что приличнымъ выборомъ коэффиціентовъ $A, B, \ldots$ можно заставить коническое сѣченіе (1) совпадать съ любымъ заданнымъ коническимъ сѣченіемъ.

246. Разложимъ первую часть уравненія (1) на сумму квадратовъ. Если A не равно нулю то

$$(A\alpha + B\beta + D\gamma)^2 + L\beta^2 + 2M\beta\gamma + N\gamma^2 = 0,$$

гдѣ

$$L = AC - B^2,\ M = AE - BD,\ N = AF - D^2.$$

Если L не равно нулю, то

$$L\,(A\alpha + B\beta + D\gamma)^2 + (L\beta + M\gamma)^2 + P\gamma^2 = 0,$$

гдѣ

$$P = NL - M^2.$$

Обозначая

$$A\alpha + B\beta + D\gamma = \alpha_1,\ L\beta + M\gamma = \beta_1,$$

мы получимъ

$$L\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 + P\gamma^2 = 0. \qquad (*)$$

Однимъ словомъ, легко видѣть, что каковы бы ни были коэффиціенты уравненія (1), мы всегда можемъ это уравненіе представить въ видѣ

$$L\alpha_1{}^2 + M\beta_1{}^2 + N\gamma_1{}^2 = 0$$

гдѣ α_1, β_1, γ_1 суть нѣкоторыя линейныя функціи α, β, γ.

Взявъ за оси трилинейныхъ координатъ прямыя $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$, мы видимъ, что всякое коническое сѣченіе въ трилинейныхъ координатахъ можетъ быть представлено въ видѣ:

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0,$$

другими словами, мы видимъ, что перемѣною трилинейныхъ координатъ можно въ уравненіи (1) § 245 уничтожить коэффиціенты B, D, E.

247. Изъ этихъ трехъ линейныхъ функцій α, β, γ одна можетъ обращаться въ постоянное число, что дастъ намъ случай, который мы разсматривали въ нашемъ курсѣ при изученіи основныхъ свойствъ линіи второго порядка съ центромъ, ибо уравненіе $L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0$ отличается отъ уравненія (*) только тѣмъ, что $\gamma = 1$. Въ этомъ случаѣ, уравненіе $\gamma = 0$ одной изъ осей трилинейныхъ координатъ обращается въ уравненіе невозможное: $1 = 0$ и даетъ такъ называемую безконечно далекую прямую. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе $Ax + By + C = 0$ опредѣляетъ прямую, отстоящую отъ начала координатъ на разстояніе $\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$; если же мы положимъ C не $= 0$, а $A = 0$ и $B = 0$, то говорятъ, что уравненіе $0x + 0.y + C = 0$, или $C = 0$, опредѣляетъ безконечно далекую прямую, отстоящую отъ начала координатъ на разстояніе $\frac{C}{0} = \infty$.

Итакъ, мы видимъ, что разсмотрѣніе линій второго порядка съ центромъ въ томъ видѣ, какъ это сдѣлано въ курсѣ, начиная съ § 131, приводится къ способу трилинейныхъ координатъ, причемъ за координатныя прямыя взяты два сопряженные діаметра $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и безконечно далекая прямая.

248. Покажемъ теперь, что двѣ изъ числа функцій α_1, β_1, γ_1 не могутъ обращаться въ постоянное число, ибо тогда получимъ

$$\alpha_1 = A\alpha + B\beta + D\gamma = k,$$

$$\beta_1 = A_1\alpha + B_1\beta + D_1\gamma = k_1.$$

Умножая первое уравненіе на k_1, а второе на k и вычитая, получимъ

$$(Ak_1 - A_1k)\,\alpha + (Bk_1 - B_1k)\,\beta + (Dk_1 - D_1k)\,\gamma = 0,$$

что показывало бы, что три прямыя

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0$$

пересѣкаются въ одной точкѣ, чего въ способѣ трилинейныхъ координатъ не должно быть (см. § 63).

249. Коэффиціенты L, M, N суть нѣкоторыя положительныя или отрицательныя числа, причемъ одинъ изъ нихъ или даже два могутъ равняться нулю.

250. Основное свойство коническаго сѣченія, уравненіе котораго приведено въ трилинейныхъ координатахъ къ простѣйшему виду

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = o, \tag{1}$$

состоитъ въ томъ, что относительно него координатный треугольникъ ($\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$) *автополяренъ*, т. е. каждая изъ его сторонъ есть поляра противоположной вершины.

Чтобы доказать это свойство выведемъ для уравненія (1) уравненіе поляры точки (α_0, β_0, γ_0). Если разсматриваемая точка лежитъ на коническомъ сѣченіи, то ея трилинейныя координаты (α_0, β_0, γ_0) удовлетворяютъ уравненію (1). Поляра обращается въ касательную. Итакъ, пусть будетъ (2) ... $L\alpha_0^2 + M\beta_0^2 + N\gamma_0^2 = o$, т. е. точка ($\alpha_0$, β_0, γ_0) лежитъ на коническомъ сѣченіи (1); найдемъ уравненіе касательной въ этой точкѣ къ коническому сѣченію. Вычитая изъ уравненія (1) уравненіе (2), получимъ

$$L(\alpha + \alpha_0)(\alpha - \alpha_0) + M(\beta + \beta_0)(\beta - \beta_0) + N(\gamma + \gamma_0)(\gamma - \gamma_0) = o \quad (3)$$

Проведемъ черезъ точку α_0, β_0, γ_0 сѣкущую; ея уравненіе будетъ

$$l(\alpha - \alpha_0) + m(\beta - \beta_0) + n(\gamma - \gamma_0) = o. \qquad (4)$$

Координаты α_1, β_1, γ_1 другого конца хорды (4) получимъ изъ уравненія (4) и двухъ слѣдующихъ

$$\frac{l}{L(\alpha + \alpha_0)} = \frac{m}{M(\beta + \beta_0)} = \frac{n}{N(\gamma + \gamma_0)} \qquad (5)$$

Остается теперь опредѣлить l, m и n такъ, чтобы точки сѣченія совпали; для этого въ уравненіи (5) необходимо положить $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$, тогда получимъ:

$$\frac{l}{2L\alpha_0} = \frac{m}{2M\beta_0} = \frac{n}{2N\gamma_0}.$$

Отсюда уравненіе касательной напишется въ такомъ видѣ:

$$L\alpha_0(\alpha - \alpha_0) + M\beta_0(\beta - \beta_0) + N\gamma_0(\gamma - \gamma_0) = o$$

или окончательно

$$L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 = o \qquad (6)$$

Послѣднее уравненіе (6) въ случаѣ, если уравненіе (2) не удовлетворяется, даетъ поляру точки α_0, β_0, γ_0.

Уравненіе (6) показываетъ, что вершинѣ $\alpha_0 = o$, $\beta_0 = o$ координатнаго треугольника, лежащей на пересѣченіи сторонъ $\alpha = o$, $\beta = o$, соотвѣтствуетъ поляра $N\gamma\gamma_0 = o$, но N мы не предполагаемъ равнымъ o, также γ_0 не $= o$, ибо координатныя прямыя не пересѣкаются въ одной точкѣ и, очевидно, поляра вершины ($\alpha = o$, $\beta = o$) есть прямая $\gamma = o$. Подобнымъ образомъ мы покажемъ, что полярами двухъ другихъ вершинъ координатнаго треугольника будутъ противоположныя стороны.

Задача. Данъ центръ (a, b) равносторонняго треугольника и радіусъ круга вписаннаго R. Найти уравненіе круга, относительно котораго данный треугольникъ автополяренъ.

Отв. Три стороны треугольника имѣютъ уравненія

$$A_1 = (x - a)\cos\alpha_1 + (y - b)\sin\alpha_1 - R = o$$

$$A_2 = (x - a)\cos\alpha_2 + (y - b)\sin\alpha_2 - R = o$$

$$A_3 = (x - a)\cos\alpha_3 + (y - b)\sin\alpha_3 - R = o$$

гдѣ
$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{2\pi}{3},\ \alpha_3 = \alpha_2 + \frac{2\pi}{3}$$

Уравненіе круга, относительно котораго заданный треугольникъ автополяренъ есть

$$LA_1{}^2 + MA_2{}^2 + NA_3{}^2 = o;$$

Остается опредѣлить L, M, N такъ, чтобы это уравненіе опредѣляло кругъ; окончательно получаемъ уравненіе $(x-a)^2 + (y-b)^2 + 2R^2 = o$.

Получается кругъ мнимый.

251. Итакъ мы видимъ, что приведеніе уравненія коническаго сѣченія въ трилинейныхъ координатахъ къ простѣйшему виду:

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0 \qquad (*)$$

приводится къ выбору за оси координатъ треугольника, автополярнаго относительно коническаго сѣченія. Такихъ треугольниковъ существуетъ безчисленное множество, а потому уравненіе всякаго коническаго сѣченія можетъ быть приведено къ виду (*) на безчисленное множество маперовъ. Напр. мы видѣли, что при выборѣ за оси двухъ сопряженныхъ діаметровъ и безконечно далекой прямой, уравненіе коническаго сѣченія имѣло видъ

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0; \qquad (1)$$

тоже самое уравненіе можно переписать, взявъ за оси два другихъ сопряженныхъ діаметра

$$\alpha_1 = l\alpha + m\beta,$$

$$\beta_1 = Lm\alpha - l\beta;$$

тогда получимъ уравненіе

$$L\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 + P_1 = 0,\ \text{гдѣ}\ P_1 = P\,(Lm^2 + l^2). \qquad (2)$$

Мѣняя числа l и m, получаемъ безчисленное множество уравненій (2), равносильныхъ уравненію (1).

252. Сказанное въ предыдущемъ параграфѣ покажемъ геометрически. Предварительно замѣтимъ нѣсколько основныхъ свойствъ поляръ.

253. Мы видѣли уже, что уравненіе коническаго сѣченія въ трилинейныхъ координатахъ можетъ быть приведено къ виду:

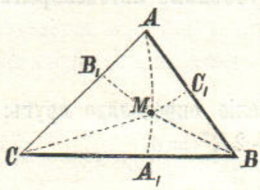
$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0.$$

Уравненіе поляры точки α_0, β_0, γ_0 было

$$L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 = 0. \quad (**)$$

Для изученія свойствъ поляръ по уравненію (**), войдемъ въ нѣкоторыя подробности относительно способа трилинейныхъ координатъ.

254. Въ параграфѣ 63 мы ввели въ разсмотрѣніе систему трилинейныхъ координатъ α, β, γ, причемъ предполагали, что уравненіе трехъ координатныхъ прямыхъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ приведены къ нормальному виду (см. §§ 60, 24).



Черт.1 28.

Три координаты α, β, γ, суть не что иное, какъ три разстоянія отъ разсматриваемой точки до трехъ координатныхъ прямыхъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, взятыя съ тѣмъ или другимъ знакомъ.

Если начало декартовыхъ координатъ (x, y) внутри треугольника трилинейныхъ координатъ, то для точекъ внутри треугольника всѣ три координаты α, β, γ отрицательны. Назовемъ черезъ a, b, c длины сторонъ BC, CA, AB координатнаго треугольника ($\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$). Возьмемъ какую нибудь точку M внутри треугольника, координаты этой точки α, β, γ будутъ

$$\alpha = -MA_1, \quad \beta = -MB_1, \quad \gamma = -MC_1;$$

обозначая черезъ $\triangle$ взятую со знакомъ минусъ удвоенную площадь треугольника ABC мы получимъ

$$\triangle = -2\,(CBM + ACM + BAM) =$$

$$= -BC.MA_1 - CA.MB_1 - AB.MC_1,$$

откуда окончательно такое соотношеніе между трилинейными координатами

$$\triangle = a\alpha + b\beta + c\gamma; \qquad (1)$$

соотношеніе (1) имѣетъ мѣсто гдѣ бы ни была взята точка M, внутри треугольника или снаружи; надо помнить, что если, напримѣръ, точка M будетъ по другую сторону линіи α, то координата α будетъ другаго знака, то есть положительная, а тогда

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = -2\,(ACM + BAM - CBM) = \triangle.$$

Итакъ, мы видимъ, что три координаты α, β, γ нѣкоторой точки M всегда удовлетворяютъ условію

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \triangle.$$

255. Если мы напишемъ уравненіе

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = k$$

гдѣ k не $= \triangle$, то такое уравненіе будетъ опредѣлять прямую, лежащую на безконечно далекомъ разстояніи, ибо такое уравненіе приводится къ уравненію $0.x + 0.y + c = 0$. (см. § 247).

256. Общее уравненіе линіи, параллельной $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$, можетъ быть написано въ трилинейныхъ координатахъ такъ:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + k\,(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0,$$

ибо оно приводится къ такому:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + k\triangle = 0,$$

причемъ $k\triangle$ постоянное.

257. Мы знаемъ, что линія, параллельная $\alpha = 0$ (*), имѣетъ уравненіе $\alpha - kC = 0$ (**), гдѣ k и C числа постоянныя; послѣднее уравненіе показываетъ, что прямая (**) проходитъ черезъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ $\alpha = 0, C = 0$, изъ которыхъ вторая безконечно далекая. Уравненіе (**) опредѣляетъ параллельную прямую, какъ встрѣчающуюся съ данною въ безконечно далекой точкѣ.

Задачи.

1) Написать уравненіе внутреннихъ биссекторовъ угловъ треугольника.

Отв. $\alpha - \beta = 0,\ \beta - \gamma = 0,\ \gamma - \alpha = 0$.

2) Написать уравненіе медіанъ, т. е. линій, соединяющихъ вершины угловъ съ серединами противоположныхъ сторонъ.

Отв. Обозначивъ углы, противоположные сторонамъ α, β, γ, черезъ A, B, C, получимъ уравненія медіанъ въ видѣ:

$$\alpha \sin A - \beta \sin B = 0;\ \beta \sin B - \gamma \sin C = 0;\ \gamma \sin C - \alpha \sin A = 0.$$

3) Найти уравненіе высотъ треугольника.

Отв. $\alpha \cos A - \beta \cos B = 0,\ \beta \cos B - \gamma \cos C = 0,\ \gamma \cos C - \alpha \cos A = 0$.

4) Найти уравненіе перпендикуляра, возставленнаго изъ середины какой нибудь стороны треугольника.

Отв. Середина стороны C опредѣлится изъ двухъ уравненій: $\alpha \sin A - \beta \sin B = 0$, $\gamma = 0$; уравненіе искомаго перпендикуляра будетъ слѣдовательно,

$$\lambda\,(\alpha \sin A - \beta \sin B) - \mu\,\gamma = 0,$$

вычитая уравненіе соотвѣтственной высоты, получимъ:

$$\lambda \sin A - k \cos A = pa = q \sin A$$

$$-\lambda \sin B + k \cos B = pb = q \sin B$$

$$-\mu = pc = q \sin C,$$

откуда получимъ:

$$\lambda = q\,\frac{\sin C}{\sin (A - B)},\quad \mu = -q \sin C;$$

искомое уравненіе будетъ

$$\alpha \sin A - \beta \sin B + \gamma \sin (A - B) = 0.$$

5) Показать, что три перпендикуляра задачи 4 пересѣкаются въ центрѣ круга описаннаго.

Отв. Умножая уравненія трехъ перпендикуляровъ на $\sin 2C$, $\sin 2A$, $\sin 2B$ и складывая, получимъ результатъ равный нулю.

6) Показать, что центръ круга описаннаго и точки встрѣчи медіанъ и высотъ лежатъ на одной прямой.

Отв. См. зад. 14 стр. 45. Уравненіе прямой, на которой лежатъ три точки есть:

$$\alpha \sin 2A \sin (B - C) + \beta \sin 2B \sin (C - A) + \gamma \sin 2C \sin (A - B) = 0.$$

6) Найти длину перпендикуляра изъ точки $\alpha' \beta' \gamma'$ на линію $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$.

Отв. $\dfrac{A\alpha' + B\beta' + C\gamma'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 2AB \cos C - 2AC \cos B - 2BC \cos A}}$.

258. Уравненіе поляры есть

$$L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 = 0. \qquad (1)$$

Если полюсъ α_0, β_0, γ_0 двигается, оставаясь постоянно на прямой

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \ (*)$$

то покажемъ, что поляра (1) вертится вокругъ точки M_1, которая есть не что иное, какъ полюсъ прямой (*). Въ самомъ дѣлѣ, выражая, что полюсъ лежитъ на прямой (*), получимъ (2) $l\alpha_0 + m\beta_0 + n\gamma_0 = 0$. Такъ какъ два уравненія (1) и (2) должны удовлетворяться при безчисленномъ множествѣ значеній α_0, β_0, γ_0, то должно быть

$$\frac{L\alpha}{l} = \frac{M\beta}{m} = \frac{N\gamma}{n}. \qquad (3)$$

Два уравненія (3) опредѣляютъ точку, черезъ которую, очевидно, проходитъ прямая (1), что и требовалось доказать; точка опредѣляемая уравненіями (3) есть полюсъ прямой (*). Въ самомъ дѣлѣ, цазывая трилинейныя координаты точки (3) черезъ α_1, β_1, γ_1, получимъ изъ уравненій (3)

$$\alpha_1 = \frac{l}{L}\rho, \quad \beta_1 = \frac{m}{M}\rho, \quad \gamma_1 = \frac{n}{N}\rho, \qquad (4)$$

гдѣ ρ есть общая величина отношеній (3).

Уравненіе поляры точки α_1, β_1, γ_1, напишется такъ:

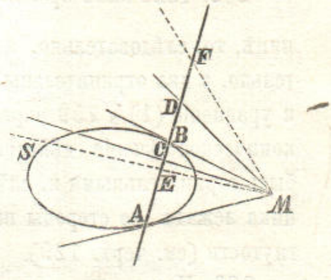
$$L\alpha\alpha_1 + M\beta\beta_1 + N\gamma\gamma_1 = 0;$$

подставляя вмѣсто α_1, β_1, γ_1 ихъ выраженія (4) и сокращая на ρ, получимъ уравненіе (*), что и требовалось доказать.

259. Пусть автополярный треугольникъ для коническаго сѣченія

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0 \qquad (1)$$

будетъ CDM со сторонами MC, MD, CD, опредѣляемыми уравненіями $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. (см. черт. 129). Черезъ точку M, опредѣляемую уравненіями $\alpha = 0$, $\beta = 0$, проведемъ сѣкущую ME, имѣющую уравненіе $\beta - \lambda\alpha = 0$ (2). Прямая эта въ сѣченіи своемъ съ прямою $\gamma = 0$ опредѣляетъ точку $E(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, трилинейныя координаты которой удовлетворяютъ уравненіямъ $\beta_0 - \lambda\alpha_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$. (3). Поляра точки E будетъ стороною FM автополярнаго треугольника EFM и будетъ имѣть уравненіе $L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 = 0$. Принимая же во вниманіе уравненія (3), получимъ $L\alpha\alpha_0 + M\beta\lambda\alpha_0 = 0$, или $L\alpha + M\lambda\beta = 0$ (4).



Черт. 129.

Послѣднее уравненіе опредѣляетъ прямую MF, проходящую черезъ точку M, ибо ея уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ $\beta - \mu\alpha = 0$ (5), гдѣ

$$\mu = -\frac{L}{M\lambda}.$$

Итакъ, мы видимъ, что двѣ прямыя ME и MF суть стороны автополярнаго треугольника EMF, причемъ точка E полюсъ стороны MF и наоборотъ, точка F полюсъ стороны ME.

260. Итакъ, мы видимъ, что въ вершинѣ M ($\alpha = 0$, $\beta = 0$) коническое сѣченіе опредѣляетъ инволюцію, выражаемую уравненіями:

$$\beta - \lambda\alpha = 0, \quad \beta - \mu\alpha = 0, \quad \lambda\mu = -\frac{L}{M}. \qquad (*)$$

Всѣ пары элементовъ этой инволюціи суть стороны различныхъ автополярныхъ треугольниковъ, имѣющихъ вершиною точку M ($\alpha = 0$, $\beta = 0$), а основаніемъ прямую CD ($\gamma = 0$).

Инволюція (*) будетъ, очевидно, эллиптическою, если L и M одинаковыхъ знаковъ и гиперболическою, если разныхъ (см. § 191). Двойнымъ элементомъ гиперболической инволюціи должны, очевидно, соотвѣтствовать касательныя MA и MB, проведенныя изъ точки M къ коническому сѣченію, ибо въ этомъ случаѣ полюсъ E долженъ лежать на соотвѣтственной полярѣ MF.

Ясно, что точка M должна лежать со стороны выпуклости кривой, чтобы черезъ нее можно было провести двѣ дѣйствительныя касательныя, или, другими словами, чтобы соотвѣтствующая ей инволюція была гиперболическою.

261. Въ вершинѣ D ($\beta = 0$, $\gamma = 0$) автополярнаго треугольника коническое сѣченіе (1) даетъ инволюцію, опредѣляемую уравненіями

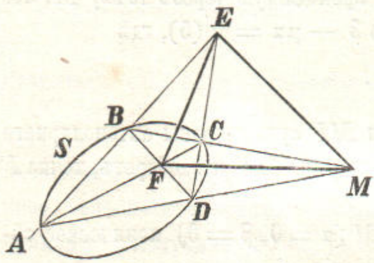
$$\gamma - \lambda\beta = 0, \quad \gamma - \mu\beta = 0, \quad \lambda\mu = -\frac{M}{N}.$$

Наконецъ въ вершинѣ C $(\gamma = 0,\ \alpha = 0)$ инволюція опредѣляется уравненіями

$$\alpha - \lambda\gamma = 0, \quad \alpha - \mu\gamma = 0, \quad \lambda\mu = -\frac{N}{L}.$$

262. Такъ какъ произведеніе трехъ отношеній $\frac{L}{M}$, $\frac{M}{N}$, $\frac{N}{L}$ равно единицѣ, то, слѣдовательно, или всѣ три отношенія положительны, или одно положительно, а два отрицательны. Въ первомъ случаѣ всѣ три коэффиціента одного знака и уравненіе (1) § 259 опредѣляетъ мнимое коническое сѣченіе. Если же заданное коническое сѣченіе дѣйствительное, то два изъ предыдущихъ отношеній должны быть отрицательными и, слѣдовательно, двѣ изъ вершинъ автополярнаго треугольника лежатъ со стороны выпуклости коническаго сѣченія и одна со стороны вогнутости (см. черт. 129).

263. Покажемъ, что по заданному очертанію коническаго сѣченія можетъ быть построенъ одною линейкою любой изъ безчисленнаго множества автополярныхъ треугольниковъ. Беремъ произвольную точку M, изъ нея проводимъ двѣ сѣкущія MA и MB, пересѣкающія коническое сѣченіе въ четырехъ точкахъ $ABCD$. Соединяемъ прямыми AB, CD, AC, BD точки A, B, C, D (см. черт. 130). Точки пересѣченія E и F дадутъ двѣ другія вершины автополярнаго треугольника EFM. Покажемъ это. Возьмемъ за треугольникъ трилинейныхъ координатъ ΔAED и пусть уравненія сторонъ ED, AE, AD будутъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.



Черт. 130.

Обозначая уравненіе стороны BC въ трилинейныхъ координатахъ черезъ $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$, получимъ для прямыхъ EF, FM, EM уравненія (см. § 75)

$$\lambda\alpha - \mu\beta = 0, \quad \lambda\alpha + \mu\beta + 2\nu\gamma = 0, \quad \lambda\alpha + \mu\beta = 0. \tag{*}$$

Уравненіе коническаго сѣченія S, проходящаго черезъ четыре точки A, B, C, D будетъ

$$\gamma . (\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma) - k\alpha\beta = 0. \tag{1}$$

Преобразуемъ уравненіе это къ новымъ трилинейнымъ координатамъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, взявъ за координатный треугольникъ прямыя (*). Очевидно, будемъ имѣть

$$\alpha_1 = \lambda\alpha - \mu\beta, \quad \beta_1 = (\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma) + \nu\gamma, \quad \gamma_1 = \lambda\alpha + \mu\beta;$$

отсюда

$$\gamma = \frac{\beta_1 - \gamma_1}{2\nu}, \quad \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = \frac{\beta_1 + \gamma_1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \gamma_1}{2\lambda}, \quad \beta = \frac{\gamma_1 - \alpha_1}{2\mu};$$

подставляя въ уравненіе (1), получимъ

$$\frac{\beta_1-\gamma_1}{2\nu}\ \frac{\beta_1+\gamma_1}{2}-k\ \frac{\alpha_1+\gamma_1}{2\lambda}\cdot\frac{\gamma_1-\alpha_1}{2\mu}=0,$$

откуда окончательно

$$\lambda\mu.\,\beta_1{}^2+k\nu\alpha_1{}^2-\gamma_1{}^2\,(\lambda\mu+k\nu)=0. \tag{2}$$

Послѣднее уравненіе (2) показываетъ, что треугольникъ EFM (*) ($\alpha_1=0$, $\beta_1=0$, $\gamma_1=0$) автополяренъ относительно всякаго коническаго сѣченія, проходящаго черезъ четыре точки, что и требовалось доказать.

264. На основаніи разсужденій послѣднихъ параграфовъ, мы замѣчаемъ, что каждой точкѣ M плоскости соотвѣтствуетъ опредѣленная инволюція относительно заданнаго коническаго сѣченія.

265. Покажемъ теперь, что фокусы суть точки круговой инволюціи.

Возьмемъ уравненіе коническаго сѣченія въ декартовыхъ координатахъ

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{1}$$

Разсмотримъ инволюцію, которую опредѣляетъ въ точкѣ M (ξ, η) заданное кон. сѣч. (1). Перенесемъ начало координатъ въ точку M; тогда уравненіе (1) обратится въ слѣдующее

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2D_1x+2E_1y+F_1=0,$$

гдѣ

$$D_1=A\xi+B\eta+D,\quad E_1=B\xi+C\eta+E,$$

а F_1 есть результатъ подстановки координатъ ξ, η въ первую часть уравненія (1) (см. § 92).

Уравненіе поляры любой точки (x_0, y_0) будетъ

$$(Ax_0+By_0+D_1)\,X+(Bx_0+Cy_0+E_1)\,Y+D_1x_0+E_1y_0+F_1=0.$$

Уравненіе поляры новаго начала координатъ будетъ:

$$D_1X+E_1Y+F_1=0. \tag{2}$$

Проведемъ прямую MC произвольно черезъ точку M; ея уравненіе будетъ

$$Y-\lambda X=0. \tag{3}$$

Координаты точки C (X_0, Y_0) (см. черт. 129) опредѣляются изъ двухъ уравненій (2) и (3).

$$X_0=-\frac{F_1}{D_1+\lambda E_1},\quad Y_0=-\frac{\lambda F_1}{D_1+\lambda E_1}. \tag{4}$$

Поляра MD точки C будетъ

$$(AX_0+BY_0+D_1).\,X+(BX_0+CY_0+E_1)\,Y=0.$$

Представляя это уравненіе въ видѣ $Y - \mu X = 0$, получимъ:

$$\mu = -\frac{AX_0 + BY_0 + D_1}{BX_0 + CY_0 + E_1}.$$

Подставляя въ послѣднее уравненіе вмѣсто X_0 и Y_0 полученныя для нихъ выраженія (4), мы получимъ послѣ приличныхъ преобразованій слѣдующее уравненіе инволюціи точки M:

$$(E^2_1 - CF_1)\lambda\mu + (E_1D_1 - BF_1)(\lambda + \mu) + D^2_1 - AF_1 = 0. \qquad (5)$$

На основаніи разсужденій § 195 мы получаемъ линію 2-го порядка, соотвѣтствующую инволюціи (5), въ видѣ

$$(E^2_1 - CF_1)y^2 + 2(E_1D_1 - BF_1)xy + (D^2_1 - AF_1)x^2 = P, \qquad (6)$$

гдѣ P совершенно произвольное число.

Очевидно, что инволюція будетъ круговая, если коническое сѣченіе (6) обращается въ кругъ, что какъ извѣстно, имѣетъ мѣсто, когда

$$E^2_1 - CF_1 = D^2_1 - AF_1$$
$$E_1D_1 - BF_1 = 0.$$

266. Примѣнимъ нахожденіе фокусовъ, какъ точекъ круговой инволюціи, къ уравненію коническаго сѣченія въ простѣйшемъ видѣ. Начнемъ съ параболы

$$y^2 - 2px = 0;$$

перенесемъ начало въ точку ξ, η:

$$y^2 - 2px + 2\eta . y + \eta^2 - 2p\xi = 0.$$

Здѣсь

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 1,\ D_1 = -p,\ E_1 = +\eta,\ F_1 = \eta^2 - 2p\xi.$$

Подставляя въ уравненіе (6), получимъ

$$p^2x^2 - 2p\eta xy + y^2(\eta^2 - \eta^2 + 2p\xi) = P,$$

или

$$px^2 - 2\eta xy + 2\xi y^2 = P_1.$$

Для того, чтобы послѣднее уравненіе давало кругъ, необходимо положить

$$\eta = 0,\ p = 2\xi,$$

что даетъ фокусъ

$$\xi = \frac{p}{2}, \quad \eta = 0.$$

Обратимся теперь къ эллипсу и гиперболѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} - 1 = 0,$$

гдѣ $\varepsilon = \pm 1$. Перенося начало въ точку ξ, η, получимъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\varepsilon b^2} + \frac{2\xi}{a^2}\, x + \frac{2\eta}{\varepsilon b^2}\, y + \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{\varepsilon b^2} - 1 = 0.$$

Здѣсь

$$A = \frac{1}{a^2},\ B = 0,\ C = \frac{1}{\varepsilon b^2},\ D_1 = \frac{\xi}{a^2},\ E_1 = \frac{\eta}{\varepsilon b^2},\ F_1 = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{\varepsilon b^2} - 1.$$

Подставляя въ уравненіе (6), получимъ

$$(\varepsilon b^2 - \eta^2)\, x^2 + 2\xi\eta\, xy + (a^2 - \xi^2)\, y^2 = P.$$

Чтобы послѣднее уравненіе опредѣляло кругъ, надо положить

$$\xi\eta = 0, \quad \varepsilon b^2 - \eta^2 = a^2 - \xi^2.$$

Итакъ мы видимъ, что фокусы опредѣляются, какъ точки пересѣченія осей кривой $\xi\eta = 0$ съ равносторонней гиперболой

$$\xi^2 - \eta^2 = a^2 - \varepsilon b^2.$$

Получаемъ два дѣйствительныхъ фокуса на оси x-овъ:

$$\eta = 0, \quad \xi = \pm\sqrt{a^2 - \varepsilon b^2}$$

и два мнимыхъ на оси y—овъ:

$$\xi = 0, \quad \eta = \pm\sqrt{-1} \cdot \sqrt{a^2 - \varepsilon b^2}.$$

267. Разсматривая уравненіе (6) (см. § 265), легко показать, что оно опредѣляетъ эллипсъ, если $F_1 \Delta < 0$ и гиперболу, если $F_1 \Delta > 0$, гдѣ Δ — дискриминантъ: $AC^2 + CD^2 + BF^2 - 2BDE - ACF$.

Кромѣ того можно показать, что при $AC - B^2 > 0$ уравненіе (6) опредѣляетъ эллипсъ для точекъ ξ и η, лежащихъ съ той стороны кривой, гдѣ центръ, ибо F_1 одного знака съ $-\dfrac{\Delta}{AC - B^2}$. Для гиперболы же $(AC - B^2 < 0)$ инволюція гиперболическая съ той стороны кривой, гдѣ центръ, ибо F_1 и $-\dfrac{\Delta}{AC - B^2}$ одного знака (см. § 136).

Для параболы, опредѣляемой уравненіемъ $(ax + by)^2 + Dx + Ey + F = 0$, начало координатъ лежитъ съ той стороны, гдѣ инволюція гиперболическая, при $F > 0$ и съ другой при $F < 0$.

268. Если черезъ точку M, лежащую внѣ коническаго сѣченія, можно къ нему провести двѣ дѣйствительныя касательныя, то въ точкѣ M будетъ гиперболическая инволюція, причемъ обѣ касательныя будутъ ея двойными элементами (асимптотами). Условіемъ равносторонней гиперболической инволюціи будетъ

$$E_1^2 - CF_1 = -(D_1^2 - AF_1). \tag{*}$$

Послѣднее уравненіе даетъ линію 2-го порядка, которая будетъ кругомъ для эллипса и гиперболы и прямой для параболы. Въ самомъ дѣлѣ, примѣняя къ уравненіямъ въ простѣйшемъ видѣ, получимъ для параболы (см. § 266) $p = -2\xi$, откуда $\xi = -\frac{p}{2}$, т. е. уравненіе директрисы.

Для случая же эллипса и гиперболы получаемъ

$$\varepsilon b^2 - \eta^2 = -(a^2 - \xi^2),$$

что даетъ кругъ:

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2 + \varepsilon b^2;$$

кругъ мнимый, если въ гиперболѣ $b > a$.

Уравненіе (*) даетъ линію геометрическаго мѣста точекъ, изъ которыхъ можно провести къ коническому сѣченію двѣ взаимно перпендикулярныя касательныя (см. задачи на кон. сѣч.).

Задачи.

1) Показать, что уравненіе (*) опредѣляетъ кругъ при $AC - B^2$ не $= 0$ и прямую при $AC - B^2 = 0$.

2) Показать, что радіусъ круга (*) равенъ $\frac{\sqrt{\Delta(A+C)}}{AC - B^2}$.

3) Показать, что для равносторонней гиперболы кругъ (*) обращается въ одну точку, совпадающую съ центромъ гиперболы.

4) Показать, что координаты фокуса кривой второго порядка, данной общимъ уравненіемъ, удовлетворяютъ двумъ слѣдующимъ уравненіямъ:

$$(Ax + By + D)(Bx + Cy + E) = B \, . \, f(x.y),$$

$$(Ax + By + D)^2 - (Bx + Cy + E)^2 = (A - C) f(x,y),$$

гдѣ $f(x, y)$ означаетъ первую часть уравненія данной кривой.

269. Обращаемся къ дальнѣйшимъ приложеніямъ сокращеннаго способа.

Мы видѣли, что уравненіе $S - k\alpha^2 = 0$ опредѣляетъ коническое сѣченіе, имѣющее двойное соприкосновеніе съ коническимъ сѣченіемъ $S = 0$ (см. § 244). Если линія $\alpha = 0$ будетъ касательною къ S, то двѣ точки P и Q (см. черт. 126) совпадутъ и коническое сѣченіе $S - k\alpha^2 = 0$ будетъ имѣть четыре общія точки съ $S = 0$. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что такъ называемое двойное соприкосновеніе обращается въ соприкосновеніе третьяго порядка. Послѣдній терминъ требуетъ разъясненія.

270. Если двѣ изъ точекъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій совпадаютъ, то говорятъ, что коническія сѣченія касаются одно другого и линія, соединяющая совпадающія точки, будетъ ихъ общая касательная. Пусть уравненія двухъ коническихъ сѣченій, отнесенныя къ касательной и нормали, будутъ

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey = 0,$$

$$A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2E_1y = 0;$$

тогда уравненіе линіи MN, соединяющей двѣ другія точки пересѣченія M и N, будетъ

$$2(BA_1 - AB_1)x + (CA_1 - AC_1)y + 2(EA_1 - AE_1) = 0.$$

Этотъ случай касанія называется *соприкосновеніемъ перваго порядка.*

Соприкосновеніе будетъ гораздо тѣснѣе, если совпадутъ три общія точки двухъ коническихъ сѣченій. Въ этомъ случаѣ одна изъ точекъ M, N должна совпадать съ точкою касанія, слѣдовательно, прямая MN будетъ проходить черезъ начало координатъ и мы получимъ условіе $EA_1 - AE_1 = 0$. Это—*соприкосновеніе втораго порядка.* Кривыя, имѣющія соприкосновеніе выше перваго порядка, называются *соприкасающимися* (оскулирующими). Очевидно, что коническія сѣченія, имѣющія соприкосновеніе втораго порядка, пересѣкаются еще въ одной точкѣ.

Самое тѣсное соприкосновеніе коническихъ сѣченій будетъ, если ихъ четыре точки пересѣченія совпадутъ. Въ этомъ случаѣ прямая MN должна совпасть съ касательною, принятою за ось x-овъ ($y = 0$), и мы получимъ два условія

$$EA_1 - AE_1 = 0, \quad BA_1 - AB_1 = 0.$$

Это—*соприкосновеніе третьяго порядка.*

271. Для опредѣленія положенія линіи второго порядка необходимо пять условій (см. § 91). Въ случаѣ параболы одно условіе должно удовлетворяться уравненіемъ $AC - B^2 = 0$, а потому положеніе параболы на плоскости опредѣляется четырьмя точками. Слѣдовательно, можно искать параболу, имѣющую съ даннымъ коническимъ сѣченіемъ соприкосновеніе третьяго порядка. Уравненіе параболы, имѣющей сказанное соприкосновеніе съ коническимъ сѣченіемъ

$$x^2 + 2Bxy + Cy_1 + 2Ey = 0$$

будетъ

$$(x + By)^2 + 2Ey = 0 \text{ (см. § 270).}$$

272. Кругъ не можетъ имѣть соприкосновенія третьяго порядка съ коническимъ сѣченіемъ, ибо необходимо удовлетворить тремъ условіямъ, чтобы уравненіе выражало кругъ, другими словами, кругъ опредѣляется вполнѣ тремя точками.

Кругъ, имѣющій въ нѣкоторой точкѣ коническаго сѣченія соприкосновеніе второго порядка, называется *соприкасающимся* кругомъ, или *кругомъ кривизны*; радіусъ этого круга называется *радіусомъ кривизны*, а центръ его *центромъ кривизны.*

Для уравненія коническаго сѣченія:

$$x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey = 0$$

уравненіе круга, имѣющаго соприкосновеніе перваго порядка, будетъ

$$x^2 + y^2 + 2\nu y = 0.$$

Чтобы это былъ кругъ кривизны, необходимо положить $1.\,2\nu - 1.\,2.\,E = 0$, откуда радіусъ кривизны выразится такъ $\nu = E$.

Задачи:

1) Найти выраженіе радіуса кривизны въ какой нибудь точкѣ эллипса.

Отв. Уравненіе эллипса, отнесенное къ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ, изъ которыхъ одинъ b_1, проходитъ черезъ заданную точку, имѣетъ видъ $\frac{x^2}{a^2_1} + \frac{y^2}{b^2_1} = 1$; перенося начало координатъ въ заданную точку, получимъ $y = y' + b_1$, откуда $\frac{x'_1}{a^2_1} + \frac{y'^2}{b^2_1} + \frac{2y'}{b_1} = 0$. Остается повернуть ось y-овъ на уголъ $\frac{\pi}{2} - \theta$, гдѣ θ уголъ между діаметрами, $Y = y' \sin\theta$; $X = x' + y' \cos\theta$. Коэффиціентъ при X^2 будетъ $\frac{1}{a^2_1}$, а при Y, $\frac{2}{b_1 \sin\theta}$, откуда радіусъ кривизны опредѣлится такъ

$$\nu = \frac{a}{b_1 \sin\theta} = \frac{a_1{}^3}{a_1 b_1 \sin\theta} = \frac{a_1{}^3}{ab} \text{ (см. § 198)}$$

Эту величину легко построить.

2) Найти координаты точки пересѣченія круга кривизны съ коническимъ сѣченіемъ.

Отв. $X = \frac{4x'^3}{a^2} - 3x'$, $Y = \frac{4y'^3}{a^2} - 3y'$.

3) Существуютъ три точки на коническомъ сѣченіи, коихъ кругъ кривизны проходитъ черезъ данную точку на кривой; эти точки лежатъ на кругѣ, проходящемъ черезъ данную точку; онѣ составляютъ треугольникъ, пересѣченіе медіанъ котораго есть центръ кривой.

Отв. Въ этой задачѣ и предыдущей можно посовѣтовать ввести эксентрическій уголъ φ (см. § 173). Легко показать, что условіемъ нахожденія четырехъ точекъ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ на одномъ кругѣ будетъ $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0$, или $= 2m\pi$ (см. зад. на коническія сѣченія 112); откуда, полагая $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$, получимъ $\varphi_1 = -\frac{\varphi_4}{3}$. Если φ_4 задано, то получимъ три значенія для φ_1, а именно $-\frac{\varphi_4}{3}$, $-\frac{\varphi_4}{3} + \frac{2}{3}\pi$, $-\frac{\varphi_4}{3} + \frac{4}{3}\pi$; эти три точки лежатъ на кругѣ, проходящемъ черезъ точку φ_4. Утвержденіе относительно центра получимъ, разсматривая уравненія предыдущей задачи и замѣчая, что эти уравненія, будучи кубическими относительно x', y', не заключаютъ членовъ съ x'^2, y'^2, откуда суммы ихъ корней равны нулю (сравн. зад. 10 стр. 45).

4) Во всѣхъ коническихъ сѣченіяхъ радіусъ кривизны равенъ кубу нормали, раздѣленному на квадратъ параметра.

273. Итакъ мы видимъ, что уравненіе $S - k\alpha^2 = 0$ въ томъ случаѣ, если $\alpha = 0$ есть касательная къ коническому сѣченію $S = 0$, опредѣляетъ коническое сѣченіе, имѣющее съ заданнымъ $S = 0$ касаніе третьяго порядка; ибо въ этомъ случаѣ четыре точки пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій совпадаютъ въ

одну, такъ напримѣръ мы видѣли (см. § 269), что два коническихъ сѣченія, имѣющихъ соприкосновеніе третьяго порядка въ какой нибудь точкѣ оси x-овъ, имѣютъ форму:

$$S = 0 \text{ и } S - ky^2 = 0.$$

Уравненіе $\alpha\beta - \gamma^2 = 0$, какъ мы видѣли, опредѣляетъ коническое сѣченіе касающееся двухъ прямыхъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$ въ точкахъ пересѣченія этихъ прямыхъ съ прямою $\gamma = 0$. Заключеніе это обобщается и для того случая, когда одна изъ линій α, β, γ находится на безконечномъ разстояніи. Въ самомъ дѣлѣ, когда, напримѣръ, $\gamma = c$, тогда уравненіе $c = 0$, какъ говорятъ, даетъ безконечно далекую прямую и уравненіе $\alpha\beta - c^2 = 0$ опредѣляетъ гиперболу, имѣющую асимптоты $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Поэтому говорятъ иногда, что гипербола касается своихъ асимптотъ въ точкахъ, лежащихъ на безконечно далекой прямой $c = 0$. Подобнымъ образомъ, если $\beta = c$, то уравненіе $\alpha c - \gamma^2 = 0$ опредѣляетъ параболу, которая касается прямой $\alpha = 0$ и безконечно далекой прямой $c = 0$ въ точкахъ встрѣчи этихъ прямыхъ съ діаметромъ $\gamma = 0$. Поэтому говорятъ иногда, что всякая парабола имѣетъ касательную на безконечности.

274. Остановимся еще на случаѣ такъ называемыхъ подобныхъ и подобно-расположенныхъ коническихъ сѣченій. Мы будемъ называть двѣ фигуры подобными и подобно-расположенными, если радіусы векторы, проведенные къ первой изъ нихъ изъ точки O находятся въ постоянномъ отношеніи къ параллельнымъ радіусамъ векторамъ, проведеннымъ къ другой черезъ точку O_1. Если сказанное свойство имѣетъ мѣсто для двухъ какихъ нибудь точекъ O и O_1, то, какъ не трудно убѣдиться, можно найти безчисленное множество паръ точекъ, обладающихъ тѣми же свойствами. Положимъ, что имѣемъ пару точекъ O_1 (x, y_1) и O_2 (x_2, y_2); уравненіе прямой, проходящей черезъ точку O_1 можетъ быть написано такъ:

$$x - x_1 = \rho \cos \theta, \quad y - y_1 = \rho \sin \theta,$$

гдѣ ρ и θ двѣ новыя величины, изъ которыхъ одна, ρ, подлежитъ исключенію изъ написанной пары уравненій; что же касается другой, θ, то отъ измѣненія ея мѣняется положеніе разсматриваемой прямой. Пусть будутъ даны два коническихъ сѣченія:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

Преобразуемъ въ первомъ систему координатъ, перенеся начало въ точку O_1, а второе уравненіе преобразуемъ, взявъ новую систему координатъ съ началомъ въ O_2. Тогда уравненія этихъ коническихъ сѣченій примутъ видъ:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2d_1x + 2e_1y + f_1 = 0. \text{ (см. § 92)}$$

Уравненія радіуса вектора, проведеннаго черезъ точку O_1, будутъ:

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta,$$

а уравненія радіуса вектора, ему параллельнаго и проходящаго черезъ точку O_2, будутъ:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Отсюда уравненія для полученія искомыхъ величинъ ρ и r будутъ:

$$(A\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta)\rho^2 + 2(D_1\cos\theta + E_1\sin\theta)\rho + F_1 = 0 \quad (1)$$

$$(a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta)r^2 + 2(d_1\cos\theta + e_1\sin\theta)r + f_1 = 0 \quad (2)$$

Но такъ какъ при всякомъ θ должно быть $r = k\rho$, то два такихъ уравненія должны быть тождественны (1) и

$$(a\cos^2\theta + 2b\sin\theta\sin\theta + c\sin^2\theta)k^2\rho^2 + 2(d_1\cos\theta + e_1\sin\theta)k\rho + f_1 = 0.$$

Отсюда мы замѣчаемъ, что надо будетъ подобрать x_1, y_1, x_2, y_2 и k такъ, чтобы удовлетворилась пропорція:

$$\frac{A\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta}{(a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta)k^2} = \frac{D_1\cos\theta + E_1\sin\theta}{(d_1\cos\theta + e_1\sin\theta)k} = \frac{F_1}{f_1} = \omega,$$

гдѣ подъ ω разумѣемъ общую величину отношенія. Такъ какъ написанная пропорція должна имѣть мѣсто при безчисленномъ множествѣ значеній угла θ, то необходимо, чтобы было

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = k^2 w,$$

что даетъ условіе подобія и подобнаго расположенія двухъ коническихъ сѣченій; для опредѣленія координатъ точекъ O_1 и O_2 получимъ слѣдующія равенства

$$\frac{D_1}{d_1} = \frac{E_1}{e_1} = k\omega, \quad \frac{F_1}{f_1} = \omega,$$

которыя, по исключеніи ω дадутъ

$$\frac{D_1}{d_1} = \frac{E_1}{e_1} = \frac{F_1}{f_1}\,k. \quad (*)$$

Легко видѣть, что, напримѣръ, если точка O_1 совпадаетъ съ центромъ коническаго сѣченія (1), то соотвѣтственная точка O_2 будетъ центромъ коническаго сѣченія (2), ибо уравненія $D_1 = 0$ и $E_1 = 0$, повлекутъ за собой какъ слѣдствія уравненія $d_1 = 0$ и $e_1 = 0$. Число же k опредѣлится изъ равенства

$$\frac{A}{a} = k^2\,\frac{F_1}{f_1}. \quad (**)$$

Интересенъ случай, когда точки O_1 и O_2 совпадаютъ. Въ такомъ случаѣ получается точка, называемая *центромъ подобія.* Покажемъ, какъ опредѣлить координаты центра подобія.

275. На основаніи сказаннаго мы замѣчаемъ, что общими уравненіями двухъ подобныхъ и подобно-расположенныхъ коническихъ сѣченій будутъ уравненія $S = 0$ и $S - k\alpha = 0$, гдѣ α линейная функція, ибо коэффиціенты A, B и C въ двухъ такихъ уравненіяхъ будутъ одинаковы. Положимъ, что за начало координатъ выбранъ центръ коническаго сѣченія $S = 0$; тогда, очевидно, уравненія заданныхъ коническихъ сѣченій будутъ имѣть видъ

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + P = 0$$

$$F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Обозначая черезъ x_1 и y_1 координаты искомаго центра подобія, получимъ для ихъ опредѣленія слѣдующія уравненія:

$$\frac{Ax_1 + By_1}{Ax_1 + By_1 + D} = \frac{Bx_1 + Cy_1}{Bx_1 + Cy_1 + E} = k\omega;\ \ \frac{f(x_1, y_1)}{F(x_1, y_1)} = \omega,$$

гдѣ $k^2\omega = 1$.

Очевидно, что искомый центръ подобія лежитъ на прямой линіи, имѣющей уравненіе

$$\frac{Ax_1 + By_1}{Ax_1 + By_1 + D} = \frac{Bx_1 + Cy_1}{Bx_1 + Cy_1 + E}.$$

Послѣднее уравненіе можно переписать въ видѣ

$$E(Ax_1 + By_1) = D(Bx_1 + Cy_1)$$

Прямая, опредѣляемая этимъ уравненіемъ, очевидно, проходитъ черезъ центры двухъ коническихъ сѣченій.

276. Покажемъ, какъ опредѣлить координаты центра подобія двухъ центральныхъ коническихъ сѣченій, зная координаты ихъ центровъ. Пусть уравненія двухъ гомотетическихъ *) коническихъ сѣченій будутъ

$$f_1(x, y) = A(x - \alpha_1)^2 + 2B(x - \alpha_1)(y - \beta_1) + C(y - \beta_1)^2 - P^2{}_1 = 0 \quad (1)$$

$$f_2(x, y) = A(x - \alpha_2)^2 + 2B(x - \alpha_2)(y - \beta_2) + C(y - \beta_2)^2 - P^2{}_2 = 0 \quad (2)$$

гдѣ, очевидно, α_1 и β_1 суть координаты центра коническаго сѣченія (1), а α_2 и β_2 — координаты центра коническаго сѣченія (2). Обозначая черезъ ξ и η координаты искомаго центра подобія и перенося начало координатъ въ эту точку, мы предста-

---

*) *Гомотетическими фигурами* (figures homothétiques) называются фигуры подобныя и подобно расположенныя. (*Chasles*. Géometrie Supérieure).

вимъ уравненія (1) и (2) въ слѣдующемъ видѣ:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2D_1 x + 2E_1 y + F_1 = 0 \qquad (1')$$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2D_2 x + 2E_2 y + F_2 = 0 \qquad (2')$$

гдѣ

$$D_1 = A(\xi - \alpha_1) + B(\eta - \beta_1),\ E_1 = B(\xi - \alpha_1) + C(\eta - \beta_1),\ F_1 = f_1(\xi, \eta),$$

$$D_2 = A(\xi - \alpha_2) + B(\eta - \beta_2),\ E_2 = B(\xi - \alpha_2) + C(\eta - \beta_2),\ F_2 = f_2(\xi, \eta).$$

Для нахожденія центра подобія придется рѣшать систему уравненія:

$$\frac{A}{A} = k\frac{D_1}{D_2} = k\frac{E_1}{E_2} = k^2\frac{F_1}{F_2}.$$

Въ данномъ случаѣ эта система обращается въ слѣдующую:

$$1 = k\frac{A(\xi - \alpha_1) + B(\eta - \beta_1)}{A(\xi - \alpha_2) + B(\eta - \beta_2)} = k\frac{B(\xi - \alpha_1) + C(\eta - \beta_1)}{B(\xi - \alpha_2) + C(\eta - \beta_2)} = k^2\frac{f_1(\xi, \eta)}{f_2(\xi, \eta)}.$$

Равенство двухъ среднихъ отношеній даетъ:

$$(AC - B^2)\,[(\xi - \alpha_1)(\eta - \beta_2) - (\xi - \alpha_2)(\eta - \beta_1)] = 0$$

отсюда, такъ какъ $AC - B^2$ не $= 0$, то имѣетъ мѣсто равенство:

$$(\xi - \alpha_1)(\eta - \beta_2) - (\xi - \alpha_2)(\eta - \beta_1) = 0.$$

На основаніи послѣдняго равенства получаемъ;

$$k = \frac{\xi - \alpha_2}{\xi - \alpha_1} = \frac{\eta - \beta_2}{\eta - \beta_1}.$$

Подставляя полученную для k величину въ уравненіе:

$$1 = k^2\,\frac{f_1(\xi, \eta)}{f_2(\xi, \eta)},$$

получимъ окончательно для опредѣленія ξ уравненіе

$$P^2{}_1(\xi - \alpha_2)^2 - P^2{}_2(\xi - \alpha_1)^2 = 0.$$

Послѣднее уравненіе распадается на два слѣдующихъ:

$$P_1(\xi - \alpha_2) + P_2(\xi - \alpha_1) = 0 \text{ и } P_1(\xi - \alpha_2) - P_2(\xi - \alpha_1) = 0.$$

Слѣдовательно, существуютъ два центра подобія; одинъ изъ нихъ имѣетъ абсциссу:

$$\xi = \frac{P_1\alpha_2 + P_2\alpha_1}{P_1 + P_2},$$

а другой:

$$\xi = \frac{P_1\alpha_2 - P_2\alpha_1}{P_1 - P_2}.$$

Подобнымъ же образомъ замѣтимъ, что ординаты этихъ центровъ подобія будутъ:

$$\eta = \frac{P_1\beta_2 + P_2\beta_1}{P_1 + P_2} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{P_1\beta_2 - P_2\beta_1}{P_1 - P_2}.$$

Указаннныя выраженія координатъ центровъ подобія показываютъ, что эти центры лежатъ на линіи, соединяющей центры заданныхъ гомотетическихъ коническихъ сѣченій и, на основаніи соображеній § 35, дѣлятъ разстояніе между центрами въ отношеніи коэффиціентовъ P_1 и P_2.

Итакъ, можно написать общія выраженія для координатъ центра подобія въ такомъ видѣ

$$\xi = \frac{\alpha_2 + \lambda\alpha_1}{1 + \lambda}, \quad \eta = \frac{\beta_2 + \lambda\beta_1}{1 + \lambda},$$

причемъ одинъ центръ подобія соотвѣтствуетъ $\lambda = -\frac{P_2}{P_1}$ и лежитъ внѣ отрѣзка между центрами, а другой соотвѣтствуетъ значенію $\lambda = +\frac{P_2}{P_1}$ и лежитъ внутри этого отрѣзка. На основаніи же §§ 70 и 74 мы видимъ, что два центра подобія дѣлятъ гармонически разстояніе между центрами данныхъ коническихъ сѣченій.

Опредѣливъ центры подобія, легко получить выраженія для k. Простыя выкладки даютъ: $k = -\lambda$, причемъ, очевидно, k положительно для внѣшняго центра подобія и отрицательно для внутренняго.

Изъ самаго понятія о центрѣ подобія ясно, что онъ лежитъ въ пересѣченіи двухъ общихъ касательныхъ къ заданнымъ гомотетическимъ коническимъ сѣченіямъ.

277. На основаніи соображеній § 151 мы замѣчаемъ, что отношеніе $\frac{P_2}{P_1}$ равняется отношенію соотвѣтственныхъ полуосей заданныхъ гомотетическихъ кривыхъ второго порядка. Отсюда, какъ слѣдствіе, вытекаетъ, что въ гомотетическихъ коническихъ сѣченіяхъ обѣ полуоси пропорціональны, а направленія соотвѣтственныхъ осей параллельны, что слѣдуетъ на основаніи § 143.

278. Сказанныя замѣчанія отъ слова до слова могутъ быть приложены къ системѣ двухъ круговъ, ибо всѣ круги суть фигуры гомотетическія, что ясно изъ того, что ихъ уравненія могутъ быть приведены къ такому виду, что $A = C = 1$, $B = 0$. Въ случаѣ круговъ P_1 и P_2 пропорціональны радіусамъ этихъ круговъ и равны имъ, если $A = C = 1$.

279. Ясно, что гомотетическія коническія сѣченія имѣютъ параллельныя асимптоты, ибо совокупность прямыхъ линій, параллельныхъ асимптотамъ, выражается уравненіемъ:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

Въ случаѣ дѣйствительности линій, опредѣляемыхъ этимъ уравненіемъ, получается гипербола, такъ что можно сказать, что двѣ гомотетическія гиперболы пересѣкаются въ двухъ безконечно удаленныхъ точкахъ. Эти точки суть точки встрѣчи безконечно далекой прямой съ ассимптотами гиперболъ. Въ случаѣ эллипса ассимптоты мнимы и потому два гомотетическихъ эллипса пересѣкаются, какъ говорятъ, въ двухъ мнимыхъ безконечно далекихъ точкахъ.

280. Остается еще разсмотрѣть случай двухъ гомотетическихъ параболъ. Ясно, что гомотетическія параболы должны имѣть параллельныя оси, а потому уравненія ихъ могутъ быть написаны въ такомъ видѣ:

$$y^2 = 2px, \quad (y-\beta)^2 = 2p_1(x-\alpha),$$

причемъ, очевидно, взяты за оси координатъ ось и касательная въ вершинѣ первой параболы, α и β суть координаты вершины второй параболы, а p и p_1 суть параметры параболъ. Обозначая черезъ ξ и η координаты искомаго центра подобія, получимъ, перенося начало координатъ въ эту точку, преобразованныя уравненія нашихъ параболъ:

$$y^2 - 2px + 2y\eta + \eta^2 - 2p\xi = 0,$$

$$y^2 - 2p_1x + 2y(\eta-\beta) + (\eta-\beta)^2 - 2p_1(\xi-\alpha) = 0.$$

Система для опредѣленія ξ и η будетъ слѣдующая:

$$1 = k\frac{p}{p_1} = k\frac{\eta}{\eta-\beta} = k^2\frac{\eta^2 - 2p\xi}{(\eta-\beta)^2 - 2p_1(\xi-\alpha)}.$$

Рѣшая эту систему относительно k, ξ и η, получимъ:

$$k = \frac{p_1}{p}, \quad \xi = \frac{p\alpha}{p-p_1}, \quad \eta = \frac{p\beta}{p-p_1}.$$

Итакъ мы видимъ, что двѣ гомотетическія параболы имѣютъ одинъ только центръ подобія. Можно сказать, что двѣ гомотетическія параболы соприкасаются на безконечности. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли уже, что парабола касается безконечно далекой прямой въ точкѣ, опредѣляемой направленіемъ оси. А такъ какъ оси двухъ гомотетическихъ параболъ параллельны, то отсюда и слѣдуетъ возможность вышеприведеннаго выраженія.

281. Разсмотримъ теперь случай трехъ центральныхъ гомотетическихъ коническихъ сѣченій. Такъ какъ для каждой пары заданныхъ линій существуютъ два центра подобія, то ясно, что всего центровъ подобія для системы трехъ гомотетическихъ коническихъ сѣченій будетъ шесть *). Всѣ шесть центровъ подобія лежатъ на сторонахъ треугольника, образованнаго центрами заданныхъ коническихъ сѣченій, причемъ три внѣшнихъ центра лежатъ внѣ треугольника. Покажемъ теперь, что сказанные шесть центровъ подобія суть вершины нѣкотораго полнаго четырехсторонника, откуда будетъ слѣдовать, что изъ шести центровъ подобія три лежатъ на одной прямой, причемъ будутъ существовать четыре прямыхъ (стороны четырехсторонника), на каждой изъ которыхъ лежатъ по три центра подобія. Эти четыре

---

*) Это замѣчаніе принадлежитъ Монжу.

прямыя называются *осями подобія*. Одна изъ нихъ проходитъ черезъ три внѣшнихъ центра подобія, три другихъ соединяютъ каждый изъ внѣшнихъ центровъ съ двумя внутренними.

Справедливость сказаннаго относительно центровъ подобія слѣдуетъ изъ теоремы Менелая (см. § 37). Въ самомъ дѣлѣ, центры подобія дѣлятъ стороны нашего треугольника въ отношеніяхъ: $\pm\frac{P_1}{P_2}$, $\pm\frac{P_2}{P_3}$, $\pm\frac{P_3}{P_1}$. Перемножая эти три отношенія, получимъ ± 1. На основаніи же теоремы Менелая три точки, дѣлящія стороны даннаго треугольника въ данныхъ трехъ отношеніяхъ, лежатъ на одной прямой въ томъ случаѣ, когда произведеніе отношеній $= -1$. А потому изъ центровъ подобія будутъ лежать на одной прямой только или три внѣшніе, дающіе три отрицательныхъ отношенія, или же одинъ внѣшній и два внутреннихъ.

282. Центры и оси подобія играютъ большую роль въ задачахъ, касающихся системъ гомотетическихъ коническихъ сѣченій, въ частномъ случаѣ, системъ круговъ. Какъ одинъ изъ любопытныхъ примѣровъ приложенія центровъ и осей подобія, укажемъ на задачу построенія круга, касающагося трехъ данныхъ круговъ. Для желающихъ познакомиться съ рѣшеніемъ этой задачи можно рекомендовать: *Poncelet*. Traité des propriétés projectives des figures. § 270. *Hesse*. Vorlesungen aus der Analytischen Geometrie der Geraden Linie, des Punktes und des Kreises. *Salmon-Fiedler*. Analytische Geometrie der Kegelschnitte.

283. Разсмотримъ случай, когда гомотетическія коническія сѣченія концентричны. Тогда ихъ общій центръ есть ихъ центръ подобія. Если примемъ за начало координатъ общій центръ, то ихъ уравненія будутъ имѣть видъ:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + P_1 = 0,$$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + P_2 = 0.$$

Отсюда мы замѣчаемъ, что общій видъ уравненій двухъ концентрическихъ гомотетическихъ коническихъ сѣченій будетъ: $S = 0$, $S + l^2 = 0$, гдѣ l нѣкоторое постоянное число. Послѣднія уравненія показываютъ, что такія кривыя соприкасаются въ двухъ безконечно удаленныхъ точкахъ, причемъ хордою соприкосновенія является безконечно удаленная прямая $l = 0$.

284. Такъ какъ всѣ круги гомотетичны, то на основаніи сказаннаго въ § 279, мы можемъ сказать, что они проходятъ черезъ двѣ мнимыя безконечно далекія, такъ называемыя *циклическія* точки. Эти циклическія точки лежатъ на безконечно далекой прямой въ ея пересѣченіи съ асимптотами круга, или, что одно и то же, въ пересѣченіи съ двумя прямыми, проведенными черезъ начало координатъ параллельно асимптотамъ, уравненіе которыхъ есть $x^2 + y^2 = 0$. Въ данномъ случаѣ асимптоты мнимы и имѣютъ уравненіями

$$x - \alpha + i(y - \beta) = 0,$$

$$x - \alpha - i(y - \beta) = 0,$$

гдѣ α и β координаты центра. Концентрическіе круги можно разсматривать какъ соприкасающіеся въ двухъ мнимыхъ безконечно удаленныхъ точкахъ.

285. Возвратимся теперь къ способу трилинейныхъ координатъ. Мы видѣли, какъ общее уравненіе коническихъ сѣченій въ этихъ координатахъ приводилось, такъ сказать, къ простѣйшему виду

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0$$

принятіемъ автополярнаго треугольника за координатный. Мы показали, что такихъ треугольниковъ безчисленное множество и, слѣдовательно, такихъ приведеній можетъ быть сдѣлано безчисленное множество. Остается изучить послѣднее уравненіе болѣе обстоятельно. Прежде всего покажемъ, какимъ условіямъ должны удовлетворять коэффиціенты L, M и N, чтобы коническое сѣченіе было эллипсомъ, гиперболою или параболою. Чтобы опредѣлить видъ кривой, опредѣляемой уравненіемъ

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0, \qquad (1)$$

разсмотримъ ея безконечно далекія точки. Мы знаемъ, что безконечно далекая прямая опредѣляется уравненіемъ:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \text{ (см. § 255)}. \qquad (2)$$

Исключая изъ уравненій (1) и (2) функцію γ, получимъ уравненіе

$$(Lc^2 + Na^2)\,\alpha^2 + 2Nab\alpha\beta + (Mc^2 + Nb^2)\,\beta^2 = 0. \qquad (3)$$

Послѣднее уравненіе опредѣляетъ двѣ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $c\gamma = \Delta$ (см. § 254). Эти прямыя будутъ дѣйствительными, совпадающими или мнимыми, смотря по тому будетъ ли $N^2a^2b^2$ больше, равно или меньше

$$(Lc^2 + Na^2)\,(Mc^2 + Nb^2).$$

Итакъ, въ случаѣ эллипса имѣемъ:

$$LMN\left(\frac{a^2}{L} + \frac{b^2}{M} + \frac{c^2}{N}\right) > 0,$$

въ случаѣ гиперболы:

$$LMN\left(\frac{a^2}{L} + \frac{b^2}{M} + \frac{c^2}{N}\right) < 0,$$

въ случаѣ же параболы:

$$\frac{a^2}{L} + \frac{b^2}{M} + \frac{c^2}{N} = 0,$$

286. Найдемъ теперь координаты центра. Для этого воспользуемся соображеніемъ, что поляра центра есть безконечно далекая прямая. Въ самомъ дѣлѣ, въ § 178 мы видѣли, что уравненіе поляры точки α_1, β_1 имѣетъ видъ:

$$L\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + P = 0.$$

Если разсматриваемая точка есть центръ, то $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$ и поляра центра имѣетъ уравненіе $P = 0$, что дастъ безконечно далекую прямую.

Обращаемся теперь къ разсмотрѣнію заданнаго уравненія

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0.$$

Мы видѣли, что полярою точки α_0, β_0, γ_0 является прямая

$$L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 = 0.$$

Для того, чтобы разсматриваемая точка была центромъ, необходимо, чтобы послѣднее уравненіе совпадало съ уравненіемъ безконечно далекой прямой, что дастъ пропорцію

$$\frac{L\alpha_0}{a} = \frac{M\beta_0}{b} = \frac{N\gamma_0}{c}.$$

Такъ какъ всѣ уравненія прямыхъ линій и коническихъ сѣченій въ трилинейныхъ координатахъ однородны, то понятно, что за координаты центра можно принять три числа, которымъ эти координаты пропорціональны, т. е. $\frac{a}{L}$, $\frac{b}{M}$, $\frac{c}{N}$.

Въ случаѣ параболы центръ лежитъ на безконечно далекой прямой, ибо его координаты удовлетворяютъ уравненію этой прямой.

287. Такъ же просто выводится уравненіе сопряженныхъ діаметровъ. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ уравненіе какого нибудь діаметра коническаго сѣченія:

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0.$$

Для того, чтобы это уравненіе опредѣляло діаметръ, необходимо, чтобы координаты центра удовлетворяли ему, что дастъ условіе:

$$\frac{la}{L} + \frac{mb}{M} + \frac{nc}{N} = 0.$$

Вспомнимъ теперь нашъ основной способъ разсмотрѣнія центральныхъ коническихъ сѣченій при помощи уравненія

$$L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0.$$

Въ § 247 мы уже говорили, что этотъ способъ разсмотрѣнія приводится къ выбору за координатный автополярнаго треугольника, образованнаго двумя сопряженными діаметрами и безконечно далекою прямою. А потому каждый изъ сопряженныхъ діаметровъ можно разсматривать какъ поляру безконечно далекой точки другого, что, впрочемъ, очевидно также изъ геометрическихъ соображеній.

Безконечно далекая точка діаметра

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$$

опредѣляется двумя уравненіями: уравненіемъ этого діаметра и уравненіемъ безконечно далекой прямой. Отсюда мы видимъ, что координаты $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ этой безконечно далекой точки опредѣлятся изъ пропорцій:

$$\frac{\alpha_0}{bn - cm} = \frac{\beta_0}{cl - an} = \frac{\gamma_0}{am - bl}.$$

Итакъ, за коорданаты $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ можно принять числа $(bn - cm)$, $(cl - an)$, $(ma - bl)$.

Уравненіе искомаго діаметра, сопряженнаго съ заданнымъ, напишется какъ уравненіе поляры точки $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$. Это уравненіе будетъ имѣть видъ:

$$L\alpha\,(bn - cm) + M\beta\,(cl - an) + N\gamma\,(am - bl) = 0. \tag{*}$$

Всѣ діаметры параболы параллельны между собою, потому что пересѣкаются въ безконечно далекой точкѣ. А потому она не имѣетъ сопряженныхъ діаметровъ. Въ этомъ случаѣ уравненіе (*) даетъ безконечно далекую прямую. Въ самомъ дѣлѣ, въ случаѣ параболы будетъ

$$l\,\frac{a}{L} + m\,\frac{b}{M} + n\,\frac{c}{N} = 0,$$

$$a\,\frac{a}{L} + b\,\frac{b}{M} + c\,\frac{c}{N} = 0 \text{ (см. § 285)}.$$

Отсюда

$$\frac{\frac{a}{L}}{bn - cm} = \frac{\frac{b}{M}}{cl - an} = \frac{\frac{c}{N}}{am - bl}.$$

Подставляя въ уравненіе (*) вмѣсто знаменателей числители этихъ отношеній, получимъ уравненіе безконечно далекой прямой.

Итакъ мы видимъ, что двѣ прямыя

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0 \quad \text{и} \quad l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0$$

будутъ представлять два сопряженныхъ діаметра въ томъ случаѣ, когда

$$l\,\frac{a}{L} + m\,\frac{b}{M} + n\,\frac{c}{N} = 0, \quad l_1\,\frac{a}{L} + m_1\,\frac{b}{M} + n_1\,\frac{c}{N} = 0;$$

послѣднія уравненія представляютъ условія, при которыхъ обѣ прямыя проходятъ черезъ центръ. Что касается коэффиціентовъ l_1, m_1, n_1, то они выражаются формулами

$$l_1 = L\,(bn - cm), \;\; m_1 = M\,(cl - an), \;\; n_1 = N\,(am - bl).$$

Отсюда очевидно, что между величинами l, m, n и l_1, m_1, n_1 существуетъ соотношеніе

$$\frac{ll_1}{L} + \frac{mm_1}{M} + \frac{nn_1}{N} = 0.$$

Полнѣйшая симметрія послѣдняго уравненія выражаетъ основное свойство сопряженныхъ діаметровъ, состоящее въ ихъ взаимности и наши разсужденія въ § 142 представляютъ частный случай.

288. Для полноты изложенія остается еще вывести тѣ условія, при которыхъ коническое сѣченіе, заданное въ трилинейныхъ координатахъ, обладаетъ какими нибудь частными свойствами: обращается въ кругъ, равностороннюю гиперболу и т. д.

Начнемъ съ разсмотрѣнія круга.

Предположимъ, что $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, выражены въ нормальномъ видѣ:

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p_1 = 0, \quad x \cos\beta + y \sin\beta - p_2 = 0,$$
$$x \cos\gamma + y \sin\gamma - p_3 = 0.$$

Для того, чтобы не вводить лишнихъ обозначеній, будемъ одною буквою α обозначать какъ всю первую часть уравненія, такъ и уголъ, образованный перпендикуляромъ къ прямой съ осью x-овъ:

$$\alpha = x \cos\alpha + y \sin\alpha - p_1 = 0.$$

Уравненіе

$$L\alpha^2 + M\beta^3 + N\gamma^2 = 0$$

можетъ быть написано въ такомъ видѣ

$$(L\cos^2\alpha + M\cos^2\beta + N\cos^2\gamma)x^2 + 2(L\cos\alpha\sin\alpha + M\cos\beta\sin\beta + N\cos\gamma\sin\gamma)xy +$$
$$+ (L\sin^2\alpha + M\sin^2\beta + N\sin^2\gamma)y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Для того чтобы кривая, опредѣляемая послѣднимъ уравненіемъ, была кругъ необходимо удовлетворить двумъ условіямъ:

$$L\cos^2\alpha + M\cos^2\beta + N\cos^2\gamma = L\sin^2\alpha + M\sin^2\beta + N\sin^2\gamma$$
$$L\cos\alpha\sin\alpha + M\cos\beta\sin\beta + N\cos\gamma\sin\gamma = 0$$

эти условія могутъ быть написаны еще такъ:

$$L\cos 2\alpha + M\cos 2\beta + N\cos 2\gamma = 0$$
$$L\sin 2\alpha + M\sin 2\beta + N\sin 2\gamma = 0,$$

откуда

$$\frac{L}{\sin 2(\beta-\gamma)} = \frac{M}{\sin 2(\gamma-\alpha)} = \frac{N}{\sin 2(\alpha-\beta)}.$$

Обозначая черезъ A, B, C углы координатнаго треугольника, лежащіе противъ сторонъ α, β, γ, получимъ:

$$\frac{L}{\sin 2A} = \frac{M}{\sin 2B} = \frac{N}{\sin 2C},$$

откуда уравненіе круга напишется въ такомъ видѣ:

$$\sin 2A\,\alpha^2 + \sin 2B\,\beta^2 + \sin 2C\gamma^2 = 0.$$

Кругъ дѣйствительный, если по крайней мѣрѣ одинъ изъ синусовъ отрицателенъ, что приводится къ требованію, чтобы автополярный треугольникъ былъ тупоугольный: отсюда слѣдуетъ напримѣръ, что кругъ не имѣетъ равносторонняго автополярнаго треугольника.

Уравненіе

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0$$

опредѣляетъ равностороннюю гиперболу, если

$$L\cos^2\alpha + M\cos^2\beta + N\cos^2\gamma = -(L\sin^2\alpha + M\sin^2\beta + N\sin^2\gamma),$$

что даетъ условіе

$$L + M + N = 0.$$

289. Найдемъ условія того, чтобы коническое сѣченіе

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + 2D\alpha\gamma + 2E\beta\gamma + F\gamma^2 = 0$$

было описано около треугольника $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Вершина треугольника $a\alpha = \Delta$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ должна лежать на коническомъ сѣченіи (1), что даетъ $A\alpha^2 = 0$; но α не $= 0$, слѣдовательно $A = 0$. Подобнымъ же образомъ покажемъ, что $C = 0$ и $F = 0$ и, слѣдовательно, уравненіе искомаго коническаго сѣченія можетъ быть написано такъ

$$B\alpha\beta + D\alpha\gamma + E\beta\gamma = 0.$$

290. Вписать въ треугольникъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ коническое сѣченіе.

Сторона $\gamma = 0$ должна касаться коническаго сѣченія (1) (см. § 290), слѣдовательно, трехчленъ

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2$$

долженъ быть полнымъ квадратомъ, то есть должно быть

$$B = \pm\sqrt{AC}.$$

Подобнымъ образомъ должно быть

$$D = \pm\sqrt{AF}, \quad E = \pm\sqrt{CF}.$$

Обозначая $A = l^2$, $C = m^2$, $F = n^2$, получимъ уравненіе

$$l^2\alpha^2 \pm 2lm\,\alpha\beta + m^2\beta^2 \pm 2ln\,\alpha\gamma \pm 2mn\,\beta\gamma + n^2\gamma^2 = 0.$$

Комбинируя на всевозможные лады знаки въ послѣднемъ уравненіи, мы замѣчаемъ, что изъ 8 случаевъ остаются только четыре слѣдующихъ:

$$l^2\alpha^2 - 2lm\,\alpha\beta + m^2\beta^2 - 2ln\,\alpha\gamma - 2mn\,\beta\gamma + n^2\gamma^2 = 0,$$

$$l^2\alpha^2 - 2lm\,\alpha\beta + m^2\beta^2 + 2ln\,\alpha\gamma + 2mn\,\beta\gamma + n^2\gamma^2 = 0,$$
$$l^2\alpha^2 + 2lm\,\alpha\beta + m^2\beta^2 - 2ln\,\alpha\gamma + 2mn\,\beta\gamma + n^2\gamma^2 = 0,$$
$$l^2\alpha^2 + 2lm\,\alpha\beta + m^2\beta^2 + 2ln\,\alpha\gamma - 2mn\,\beta\gamma + n^2\gamma^2 = 0,$$

остальные четыре даютъ прямую линію.

Если будемъ придавать коэффиціентамъ l, m, n различные знаки, то можно будетъ написать одно общее уравненіе

$$l^2\alpha^2 - 2lm\,\alpha\beta + m^2\beta^2 - 2ln\,\alpha\gamma - 2mn\,\beta\gamma + n^2\gamma^2 = 0.$$

Послѣднее уравненіе можетъ быть написано въ такомъ видѣ

$$\sqrt{l\alpha} + \sqrt{m\beta} + \sqrt{n\gamma} = 0.$$

291. *Задача.* Данъ эллипсъ; доказать, что двѣ произвольныя точки и четыре точки прикосновенія касательныхъ къ данному эллипсу, проходящихъ черезъ эти точки, лежатъ на одной кривой второго порядка.

Возьмемъ коническое сѣченіе

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0 \tag{1}$$

и двѣ его хорды

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,\ l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0.$$

Уравненіе коническаго сѣченія, проходящаго черезъ точки встрѣчи хордъ съ линіею (1), будетъ имѣть уравненіе

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 - k\,(l\alpha + m\beta + n\gamma)\,(l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma) = 0.$$

Возьмемъ точку α_0, β_0, γ_0 внѣ коническаго сѣченія (1); тогда уравненіе поляры будетъ

$$L\alpha\alpha_0 + M\beta\beta_0 + N\gamma\gamma_0 = 0;$$

отсюда полюсъ для прямой

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$$

будетъ опредѣляться изъ условія

$$\frac{L\alpha_0}{l} = \frac{M\beta_0}{m} = \frac{N\gamma_0}{n} = \rho.$$

Выражая условіе того, чтобы коническое сѣченіе проходило черезъ точку $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, получимъ

$$k = \frac{1}{\dfrac{ll_1}{L} + \dfrac{mm_1}{M} + \dfrac{nn_1}{N}};$$

такое же условіе будетъ и для прохожденія коническаго сѣченія черезъ полюсъ хорды

$$l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0.$$

Изъ симметричности послѣдняго выраженія вытекаетъ справедливость высказаннаго въ задачѣ предложенія.

292. *Задача.* Кругъ проходящій черезъ центръ равносторонней гиперболы и черезъ двѣ вершины автополярнаго треугольника, проходитъ также черезъ третью.

Уравненіе гиперболы имѣетъ видъ

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0,$$

причемъ

$$L + M + N = 0.$$

Легко показать, что уравненіе круга, описаннаго около автополярнаго треугольника, имѣетъ видъ

$$a\,\beta\gamma + b\,\beta\gamma + c\,\alpha\beta = 0.$$

Послѣднее же уравненіе показываетъ, что на этомъ кругѣ лежитъ центръ гиперболы:

$$\frac{a}{L},\ \frac{b}{M},\ \frac{c}{N}.$$

Что уравненіе

$$a\,\beta\gamma + b\,\gamma\alpha + c\,\alpha\beta = 0$$

представляетъ кругъ, описанный около автополярнаго треугольника, ясно изъ слѣдующихъ соображеній.

Уравненіе $l\,\beta\gamma + m\,\gamma\alpha + n\,\alpha\beta = 0$ опредѣляетъ коническое сѣченіе, описанное около автополярнаго треугольника, ибо оно удовлетворяется каждымъ изъ положеній:

$$\alpha = 0, \beta = 0;\quad \beta = 0, \gamma = 0;\quad \gamma = 0, \alpha = 0.$$

Условія, чтобы это мѣсто было кругъ, выражаются такъ:

$$l\cos(\beta + \gamma) + m\cos(\gamma + \alpha) + n\cos(\alpha + \beta) = 0,$$

$$l\sin(\beta + \gamma) + m\sin(\gamma + \alpha) + n\sin(\alpha + \beta) = 0.$$

Опредѣляя m и n изъ этихъ уравненій, получимъ

$$\frac{m}{l} = \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin(\beta - \gamma)};\qquad \frac{n}{l} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\beta - \gamma)}.$$

Теперь, если уголъ между сторонами α, β будетъ C, то:

$$\sin C = \sin(\alpha - \beta),\ \text{и т. д.}$$

(ибо $\alpha - \beta$ есть уголъ между перпендикулярами на эти стороны); слѣдовательно уравненіе круга, описаннаго около треугольника, будетъ:

$$\beta\gamma\sin A + \gamma\alpha\sin B + \alpha\beta\sin C = 0.$$

Можно предложить, въ видѣ упражненія, доказать, что послѣднее уравненіе выражаетъ слѣдующее геометрическое свойство. Основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ на стороны треугольника изъ точки, лежащей на окружности описаннаго около этого треугольника круга, лежатъ на одной прямой.

293. *Задача.* Найти уравненіе коническаго сѣченія, описаннаго около треугольника $\alpha\beta\gamma$, имѣющаго центръ въ данной точкѣ α_0, β_0, γ_0.

Уравненіе коническаго сѣченія будетъ:

$$l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = 0.$$

Уравненіе поляры заданной точки будетъ

$$\alpha(m\gamma_0 + n\beta_0) + \beta(n\alpha_0 + l\gamma_0) + \gamma(l\beta_0 + m\alpha_0) = 0.$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ безконечно далекой прямой, получимъ

$$\frac{m\gamma_0 + n\beta_0}{a} = \frac{n\alpha_0 + l\gamma_0}{b} = \frac{l\beta_0 + m\alpha_0}{c}.$$

Отсюда найдемъ числа, которымъ пропорціональны l, m, n.

Если будетъ дана еще одна точка, черезъ которую должно проходить описанное коническое сѣченіе, то можно искать кривую геометрическаго мѣста центровъ.

294. *Задача.* Провести коническое сѣченіе черезъ пять данныхъ точекъ.

Примемъ три изъ числа заданныхъ точекъ за вершины координатнаго треугольника; двѣ же другія пусть имѣютъ координаты α_0, β_0, γ_0; α_1, β_1, γ_1. Придется удовлетворить двумъ условіямъ:

$$l\beta_0\gamma_0 + m\gamma_0\alpha_0 + n\alpha_0\beta_0 = 0.$$
$$l\beta_1\gamma_1 + m\gamma_1\alpha_1 + n\alpha_1\beta_1 = 0.$$

Откуда искомое коническое сѣченіе опредѣлится уравненіемъ:

$$\begin{vmatrix} \alpha\beta & \beta\gamma & \gamma\alpha \\ \alpha_0\beta_0 & \beta_0\gamma_0 & \gamma_0\alpha_0 \\ \alpha_1\beta_1 & \beta_1\gamma_1 & \gamma_1\alpha_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (См. Прибавленіе).}$$

295. *Задача.* Найти уравненіе коническаго сѣченія, вписаннаго въ данный треугольникъ и имѣющаго центромъ данную точку.

Уравненіе поляры заданной точки имѣетъ видъ (см. § 290):

$$\alpha l(m\beta_0 + n\gamma_0 - l\alpha_0) + \beta m(l\alpha_0 + n\gamma_0 - m\beta_0) + \gamma m(l\alpha_0 + m\beta_0 - n\gamma_0) = 0:$$

Сравнивая коэффиціенты этого уравненія съ коэффиціентами безконечно далекой прямой, получимъ пропорцію, изъ которой опредѣлятся коэффиціенты l, m, n.

Въ видѣ упражненія можно предложить найти мѣсто центровъ коническаго сѣченія, касающагося трехъ данныхъ прямыхъ и проходящаго черезъ данную точку.

Показать, что получится коническое сѣченіе, касающееся прямыхъ, соединяющихъ средины сторонъ треугольника, составленнаго данными касательными.

296. *Задача.* Найти уравненіе коническаго сѣченія, касающагося пяти данныхъ прямыхъ.

Примемъ треугольникъ, образованный тремя изъ числа данныхъ прямыхъ за координатный (см. § 290). Остается подобрать l, m, n такъ, чтобы коническое сѣченіе касалось двухъ другихъ прямыхъ:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0, \quad A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = 0.$$

Придется удовлетворить двумъ уравненіямъ:

$$\frac{l}{A} + \frac{m}{B} + \frac{n}{C} = 0, \qquad \frac{l}{A_1} + \frac{m}{B_1} + \frac{n}{C_1} = 0.$$

297. *Задача.* Найти геометрическое мѣсто фокуса коническаго сѣченія, вписаннаго въ треугольникъ, другой фокусъ котораго описываетъ заданную линію.

Примемъ данный треугольникъ за координатный и пусть координаты фокуса, описывающаго данную линію, будутъ α_0, β_0, γ_0. Прямыя, соединяющія его съ вершинами треугольника, будутъ:

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\beta}{\beta_0}, \quad \frac{\beta}{\beta_0} = \frac{\gamma}{\gamma_0}, \quad \frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{\alpha}{\alpha_0},$$

а такъ какъ прямыя, соединяющія эти вершины съ другимъ фокусомъ, составляютъ равные углы со сторонами треугольника (см. зад. 32), то ихъ уравненія будутъ

$$\alpha\alpha_0 = \beta\beta_0; \quad \beta\beta_0 = \gamma\gamma_0; \quad \gamma\gamma_0 = \alpha\alpha_0;$$

послѣднее вытекаетъ изъ того соображенія, что прямая $\alpha - k\beta = 0$, очевидно, составляетъ такой уголъ съ α, какой прямая $k\alpha - \beta = 0$ составляетъ съ β. Ясно, что за координаты другого фокуса можно принять

$$\frac{1}{\alpha_0}, \frac{1}{\beta_0}, \frac{1}{\gamma_0}.$$

Изъ этой общей задачи слѣдуютъ, какъ частные случаи, разнообразныя задачи, которыя мы приводили раньше. Напримѣръ, въ двухъ словахъ рѣшается задача 106 (стр. 224). Такъ какъ одинъ изъ фокусовъ параболы лежитъ на безконечно далекой прямой, то, слѣдовательно, удовлетворяется уравненіе

$$a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0 = 0;$$

другой же фокусъ будетъ на линіи, опредѣляемой уравненіемъ

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} = 0.$$

Послѣднее уравненіе можетъ быть преобразовано такъ:

$$a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0$$

и опредѣляетъ кругъ, описанный около треугольника $\alpha\beta\gamma$.

Подобнымъ же образомъ легко рѣшить зад. 200.

298. Въ заключеніе нашего изученія коническихъ сѣченій при помощи трилинейныхъ координатъ замѣтимъ, какъ частный случай, уравненіе

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - (lx + my + n)^2 = 0,$$

гдѣ a и b суть координаты фокуса, а $lx + my + n = 0$ директриса.

Обозначая: $x - a = \alpha$, $y - b = \beta$, $lx + my + n = \gamma$, напишемъ наше уравненіе въ видѣ:

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0.$$

Это уравненіе представляетъ частный случай уравненія коническаго сѣченія, отнесеннаго къ автополярному треугольнику.

Въ данномъ случаѣ этотъ треугольникъ прямоугольный; вершина прямого угла фокусъ, катеты параллельны осямъ координатъ, а гипотенуза—директриса.

Отсюда непосредственно вытекаетъ, что директриса есть поляра фокуса.

Уравненіе коническаго сѣченія въ послѣднемъ видѣ примѣняется съ большимъ удобствомъ къ рѣшенію задачъ.

Приложенія теоріи инваріантовъ къ коническимъ сѣченіямъ.

299. Въ § 148 мы видѣли, что для всякаго коническаго сѣченія

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

уравненіе котораго отнесено къ нѣкоторой прямоугольной системѣ координатъ, выраженія $A + C$, $AC - B^2$ были инваріантами преобразованія координатъ, если только это преобразованіе сводится къ повороту прямоугольной системы координатъ на нѣкоторый уголъ вокругъ начала координатъ. Это замѣчаніе можетъ быть слѣдующимъ образомъ обобщено.

Возьмемъ уравненіе коническаго сѣченія съ центромъ, отнесенное къ этому центру:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + P = 0, \tag{1}$$

причемъ оси координатъ пусть будутъ какія угодно, образующія уголъ ω. Если мы перейдемъ, оставивъ то же начало, къ новой системѣ координатъ, оси которой нѣкоторыя другія и образуютъ уголъ Ω, то уравненіе коническаго сѣченія (1) при новыхъ координатахъ будетъ имѣть видъ такой же, причемъ членъ P, независящій отъ координатъ, не мѣняетъ своей величины, трехчленъ же

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

обращается въ подобный

$$A_1 x_1^2 + 2B_1 x_1 y_1 + C_1 y_1^2,$$

гдѣ A_1, B_1, C_1 суть нѣкоторые коэффиціенты, величина которыхъ зависитъ отъ выбора новой системы координатъ, а x_1 и y_1 суть новыя координаты точки M, старыя координаты которой x и y. Такъ какъ начало координатъ не мѣняется, то растояніе точки M до начала не мѣняется отъ преобразованія координатъ. Слѣдовательно, имѣетъ мѣсто равенство

$$x^2 + 2\cos\omega\, xy + y^2 = x_1^2 + 2\cos\Omega\, x_1 y_1 + y_1^2 \tag{2}$$

Кромѣ того,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A_1 x_1^2 + 2B_1 x_1 y_1 + C_1 y_1^2 \tag{3}$$

Умножая равенство (2) на нѣкоторый, пока произвольный, множигель λ, и складывая съ уравненіемъ (3), получимъ

$$(A + \lambda) x^2 + 2(B + \lambda \cos\omega) xy + (C + \lambda) y^2 =$$
$$= (A_1 + \lambda) x_1^2 + 2(B_1 + \lambda\cos\Omega) x_1 y_1 + (C_1 + \lambda) y_1^2. \tag{4}$$

Подберемъ теперь λ такъ, чтобы первая часть уравненія (4) обращалась въ полный квадратъ линейной функціи. Для этой цѣли мы должны удовлетворить уравненію

$$(A + \lambda)(C + \lambda) - (B + \lambda\cos\omega)^2 = 0,$$

которое, по раздѣленію на $\sin^2\omega$, обращается въ слѣдующее:

$$\lambda^2 + \frac{A + C - 2B\cos\omega}{\sin^2\omega}\lambda + \frac{AC - B^2}{\sin^2\omega} = 0. \tag{5}$$

Принимая же въ соображеніе, что старыя координаты линейно выражаются черезъ новыя, мы замѣчаемъ, что для выбраннаго значенія λ также и вторая часть дѣлается полнымъ квадратомъ линейной функціи, т. е., другими словами, удовлетворяется уравненіе

$$(A_1 + \lambda)(C_1 + \lambda) - (B_1 + \lambda\cos\Omega)^2 = 0.$$

или равносильное ему

$$\lambda^2 + \frac{A_1 + C_1 - 2B_1\cos\Omega}{\sin^2\Omega}\lambda + \frac{A_1 C_1 - B_1^2}{\sin^2\Omega} = 0. \tag{6}$$

Такъ какъ уравненія (5) и (6) должны удовлетворяться при однихъ и тѣхъ же значеніяхъ λ, то, слѣдовательно, должны существовать равенства:

$$\frac{A+C-2B\cos\omega}{\sin^2\omega}=\frac{A_1+C_1-2B_1\cos\Omega}{\sin^2\Omega},$$

$$\frac{AC-B^2}{\sin^2\omega}=\frac{A_1C_1-B^2_1}{\sin^2\Omega}.$$

Послѣднія равенства показываютъ, что выраженія

$$\frac{A+C-2B\cos\omega}{\sin^2\omega},\quad \frac{AC-B^2}{\sin^2\omega}$$

суть инваріанты преобразованія координатъ.

300. Указанное свойство инваріантовъ даетъ непосредственно извѣстныя теоремы Аполлонія, выведенныя нами въ §§ 197 и 198. Въ самомъ дѣлѣ, принимая во вниманіе, что уравненіе эллипса, отнесенное къ сопряженнымъ діаметрамъ, имѣетъ видъ:

$$\frac{x^2}{a^2_1}+\frac{y^2}{b^2_1}=1,$$

а отнесенное къ осямъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

замѣчаемъ, что можно положить

$$A=\frac{1}{a^2_1},\ B=0,\ C=\frac{1}{b^2_1},\ A_1=\frac{1}{a^2},\ B_1=0,\ C_1=\frac{1}{b^2};$$

кромѣ того уголъ между сопряженными діаметрами будетъ ω, а $\Omega=90^\circ$. Уравненія, выражающія свойства инваріантовъ, обращаются въ слѣдующія:

$$\frac{a^2_1+b^2_1}{a^2_1 b^2_1\sin^2\omega}=\frac{a^2+b^2}{a^2 b^2},\quad \frac{1}{a^2_1 b^2_1\sin^2\omega}=\frac{1}{a^2 b^2},$$

а эти даютъ окончательно

$$a^2_1+b^2_1=a^2+b^2,\quad a_1 b_1\sin\omega=ab,$$

т. е. какъ разъ равенства, выражающія теоремы Аполлонія.

301. Разсмотримъ теперь общее уравненіе коническаго сѣченія въ трилинейныхъ координатахъ:

$$A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2+2D\alpha\gamma+2E\beta\gamma+F\gamma^2=0 \tag{1}$$

Назовемъ подобно тому, какъ это сдѣлано въ § 88, опредѣлитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix}$$ (См. прибавленіе).

дискриминантомъ уравненія (1).

302. Сдѣлаемъ теперь преобразованіе координатъ, причемъ перейдемъ къ другой системѣ трилинейныхъ координатъ, опредѣляемой формулами:

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\beta_1 + a_3\gamma_1,\ \ \beta = b_1\alpha_1 + b_2\beta_1 + b_3\gamma_1,$$
$$\gamma = c_1\alpha_1 + c_2\beta_1 + c_3\gamma_1.$$

Понятно, что отъ такого преобразованія уравненіе (1) приметъ видъ:

$$A_1\alpha^2{}_1 + 2B_1\alpha_1\beta_1 + C_1\beta^2{}_1 + 2D_1\alpha_1\gamma_1 + 2E_1\beta_1\gamma_1 + F_1\gamma^2{}_1 = 0, \qquad (2)$$

гдѣ коэффиціенты A_1, B_1, и т. д. выражаются черезъ A, B, C, ..., $a_1\ a_2\ a_3$, $b_1\ b_2\ b_3$, $c_1\ c_2\ c_3$. Обозначимъ:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ B_1 & C_1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{vmatrix} \text{ и } \delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

получимъ $\Delta_1 = \Delta\delta^2$ (см. прибавленіе).

Итакъ мы видимъ, что дискриминантъ Δ есть такая функція коэффиціентовъ уравненія (1) коническаго сѣченія, которая отъ перехода отъ одной трилинейной системы къ другой получаетъ множитель, равный квадрату опредѣлителя, составленнаго изъ коэффиціентовъ формулъ преобразованія. Такая функція отъ коэффиціентовъ называется *инваріантомъ*.

303. Такъ какъ мы всегда, употребляя трилинейныя координаты, беремъ за координатныя прямыя три прямыя, не пересѣкающіяся въ одной точкѣ, то опредѣлитель δ не $= 0$ (см. § 63 и прибавленіе). Отсюда мы замѣчаемъ, что, если $\Delta = 0$, то и $\Delta_1 = 0$.

304. Покажемъ геометрически значеніе равенства $\Delta = 0$. Если новая система координатъ будетъ обыкновенная декартовская, то $\alpha_1 = x$, $\beta_1 = y$, $\gamma_1 = 1$, а тогда равенство $\Delta_1 = 0$ будетъ выражать, согласно § 88, что заданное коническое сѣченіе обращается въ систему двухъ прямыхъ.

Итакъ, условіемъ того, чтобы коническое сѣченіе $S - kS_1 = 0$ приводилось къ двумъ прямымъ, является равенство нулю дискриминанта, въ какихъ бы координатахъ это уравненіе ни было выражено.

305. Итакъ, первая часть уравненія

$$\Delta + k\Theta + k^2\Theta_1 + k^3\Delta_1 = 0, \qquad (1)$$

будучи дискриминантомъ уравненія

$$S - kS_1 = 0,$$

получаетъ при преобразованіи координатъ множитель δ^2, не зависящій отъ величины k, а, слѣдовательно, этотъ множитель получаютъ отдѣльно каждый изъ коэффиціентовъ: Δ, Θ, Θ_1, Δ_1. Изъ сказаннаго видно, что эти коэффиціенты суть инваріанты.

Коэффиціенты Δ и Δ_1 суть дискриминанты $S=0$ и $S_1=0$. Коэффиціенты же Θ и Θ_1 суть такъ называемые совокупные инваріанты уравненій $S=0$ и $S_1=0$, такъ какъ въ каждый изъ нихъ входятъ коэффиціенты обоихъ уравненій.

306. Разсмотримъ теперь два случая, когда 1) $\Theta=0$ и 2) $\Theta_1=0$.

Покажемъ, что если нѣкоторый треугольникъ автополяренъ относительно одного изъ коническихъ сѣченій, напр. $S=0$, и вписанъ въ другое $S_1=0$, то $\Theta=0$.

Достаточно показать, что инваріантъ Θ обращается въ нуль при одной какой либо системѣ координатъ. Возьмемъ указанный автополярный треугольникъ $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ за координатный.

Въ разсматриваемомъ случаѣ

$$S=L\alpha^2+M\beta^2+N\gamma^2,\ S_1=2l\,\beta\gamma+2m\,\gamma\alpha+2n\,\alpha\beta=0$$

$$S-kS_1=L\alpha^2-2kn\,\alpha\beta+M\beta^2-2km\,\alpha\gamma-2kl\,\beta\gamma+N\gamma^2=0.$$

Приравнивая дискриминантъ послѣдняго уравненія нулю, получимъ

$$\begin{vmatrix} L, & -kn, & -km \\ -kn, & M, & -kl \\ -km, & -kl, & N \end{vmatrix}=LMN-k^2(Ll^2+Mm^2+Nn^2)-k^3\,2l\,mn=0.\ (*)$$

Въ этомъ случаѣ

$$\Delta=LMN,\qquad \Theta=0,$$

$$\Theta_1=-(Ll^2+Mm^2+Nn^2)\qquad \Delta_1=-2lmn.$$

Итакъ, $\Theta=0$, что и требовалось доказать.

307. Уравненіе (*) можно получить и безъ помощи опредѣлителей, разлагая, согласно § 246, первую часть уравненія $S-kS_1=0$ на сумму квадратовъ и приравнивая коэффиціентъ P нулю.

308. Понятно, что, если мы помѣняемъ ролями коническія сѣченія S и S_1, то получимъ такую теорему:

Если треугольникъ автополяренъ съ S_1 и вписанъ въ S, то равенъ нулю другой инваріантъ Θ_1.

309. Покажемъ теперь другое значеніе условія $\Theta_1=0$. Если автополярный по отношенію къ S треугольникъ описанъ около S_1, то $\Theta_1=0$. Легко замѣтить, что уравненіе коническаго сѣченія, вписаннаго въ координатный треугольникъ, будетъ имѣть видъ:

$$l^2\alpha^2-2lm\,\alpha\beta+m^2\beta^2-2ln\,\alpha\gamma-2mn\,\beta\gamma+n^2\gamma^2=0. \tag{1}$$

Итакъ, принимая указанный автополярный треугольникъ за координатный мы получимъ:

$$S=L\alpha^2+M\beta^2+N\gamma^2,$$

а $S_1 = 0$, по условію задачи, должно совпадать съ уравненіемъ (1). Выражая для уравненія

$$S - kS_1 = 0$$

условіе равенства нулю дискриминанта, мы получимъ уравненіе:

$$LMN - k(l^2 MN + m^2 LN + n^2 LM) + 4l^2m^2n^2k^3 = 0.$$

Отсюда мы замѣчаемъ, что

$$\Delta = LMN, \quad \Theta = -(l^2 MN + m^2 LN + n^2 LM).$$

$$\Theta_1 = 0, \text{ а } \Delta_1 = 4\, l^2\, m^2\, n^2.$$

Понятно, что, обратно, если треугольникъ, автополярный относительно S_1, будетъ описанъ около S, то $\Theta = 0$.

310. Покажемъ еще, что, если треугольникъ, описанный около S, вписанъ въ S_1, то первые три члена уравненія: $\Delta + \Theta k + \Theta_1 k^2$ образуютъ полный квадратъ, т. е. $4\Delta\Theta_1 - \Theta^2 = 0$ (*). Но выраженіе $4\Delta\Theta_1 - \Theta^2$ есть новый инваріантъ, и потому условіе (*) будетъ имѣть мѣсто при всякихъ координатахъ.

Примемъ разсматриваемый въ задачѣ треугольникъ за координатный, тогда за уравненіе $S = 0$ можно принять (1) (см. § 309). Уравненіе же $S_1 = 0$ напишемъ въ такомъ видѣ: $2\nu\alpha\beta + 2\mu\gamma\alpha + 2\lambda\beta\gamma = 0$.

Выражая условіе равенства нулю дискриминанта, мы получимъ уравненіе:

$$4n^2m^2l^2 + 4kmnl(\lambda l + \mu m + \nu n) + (\lambda l + \mu m + \nu n)^2 k^2 + 2k^3 \lambda\mu\nu = 0.$$

Полученное уравненіе показываетъ справедливость высказанной теоремы, такъ какъ первые три члена полученнаго уравненія представляютъ полный квадратъ двучлена $2lmn + k(\lambda l + \mu m + \nu n)$.

311. Очевидно, что, если описанный около S_1 треугольникъ будетъ вписанъ въ S, то будетъ удовлетворяться равенство

$$4\Delta_1\Theta - \Theta^2{}_1 = 0.$$

312. Приложимъ изложенное къ рѣшенію такой задачи.

Найти геометрическое мѣсто центровъ тяжести вписанныхъ въ эллипсъ и описанныхъ около него равностороннихъ треугольниковъ.

Пусть уравненіе заданнаго эллипса будетъ:

$$S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Называя черезъ R радіусъ круга, вписаннаго въ равносторонній треугольникъ, а координаты центра тяжести черезъ (α, β), получимъ уравненіе круга вписаннаго въ видѣ:

$$U = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2 = 0.$$

Уравненіе круга описаннаго будетъ:

$$V=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-4R^2=0.$$

Уравненіе круга, относительно котораго треугольникъ автополяренъ:

$$W=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2R^2=0 \text{ (см. § 250).}$$

Займемся сначала разсмотрѣніемъ вписанныхъ въ эллипсъ треугольниковъ.

Треугольникъ автополяренъ относительно $W=0$ и вписанъ въ $S=0$. Слѣдовательно, для пучка коническихъ сѣченій $W-kS=0$ инваріантъ Θ равенъ нулю.

Итакъ, для уравненія

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2R^2-k\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0$$

равенство нулю дискриминанта даетъ уравненіе:

$$2R^2-k\left(\frac{\alpha^2+2R^2}{a^2}+\frac{\beta^2+2R^2}{b^2}-1\right)+$$

$$+k^2\frac{\alpha^2+\beta^2+2R^2-a^2-b^2}{a^2b^2}+k^3.\frac{1}{a^2b^2}=0. \qquad (*)$$

Условіе $\Theta=0$ даетъ: $\dfrac{\alpha^2+2R^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2+2R^2}{b^2}-1=0.$ (1)

Треугольникъ описанъ около $U=0$ и вписанъ въ $S=0$. Уравненіе для пучка $U-kS=0$ будетъ:

$$-R^2-k.\left(\frac{\alpha^2-R^2}{a^2}+\frac{\beta^2-R^2}{b^2}-1\right)+$$

$$+k^2\frac{\alpha^2+\beta^2-R^2-a^2-b^2}{a^2b^2}+k^3\frac{1}{a^2b^2}=0.$$

Условіе $\Theta^2-4\Theta_1\Delta=0$ даетъ:

$$[b^2(\alpha^2-R^2)+a^2(\beta^2-R^2)-a^2b^2]^2-4a^2b^2R^2(a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2+R^2)=0. \quad (2)$$

Исключая R^2 изъ уравненій (1) и (2), получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста. Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія (1) получимъ:

$$R^2=-\frac{H}{2(a^2+b^2)}\text{, гдѣ } H=b^2\alpha^2+a^2\beta^2-a^2b^2.$$

Подставляя это выраженіе во (2) и сокращая множителя H, получимъ окончательно

$$b^2\alpha^2(a^2+3b^2)^2+a^2\beta^2(b^2+3a^2)^2-a^2b^2c^4=0.$$

Геометрическое мѣсто, слѣдовательно, есть эллипсъ, имѣющій тѣ же оси, что и данный.

Займемся теперь описанными треугольниками.

Треугольникъ автополяренъ съ $W = 0$ и описанъ около $S = 0$. Тогда для пучка $W - kS = 0$ будетъ равенъ нулю инваріантъ Θ_1 уравненія (*), что даетъ: $a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2R^2 = 0$, откуда

$$2R^2 = a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2. \quad (1)$$

Треугольникъ описанъ около $S_1 = 0$ и вписанъ въ V; для $S_1 - kV = 0$ получимъ уравненіе:

$$-\frac{1}{a^2 b^2} - k\,\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 4R^2 - a^2 - b^2}{a^2 b^2} +$$

$$+ k^2 \left(\frac{\alpha^2 - 4R^2}{a^2} + \frac{\beta^2 - 4R^2}{b^2} - 1\right) + 4R^2 k^3 = 0,$$

гдѣ должно быть $\Theta^2 - 4\Theta_1\Delta = 0$

$$(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 - 4R^2)^2 + 4\left[b^2(\alpha^2 - 4R^2) + (\beta^2 - 4R^2)a^2 - a^2 b^2\right] = 0. \quad (2)$$

Исключимъ R^2 изъ уравненій (1) и (2) и замѣнимъ α и β на x и y—получимъ окончательно уравненіе искомаго геометрическаго мѣста въ слѣдующемъ видѣ:

$$(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)\left[9(x^2 + y^2) - a^2 - b^2\right] + 4(b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2) = 0$$

Слѣдовательно геометрическое мѣсто есть кривая 4-го порядка.

313. Если два коническихъ сѣченія $S = 0$ и $S_1 = 0$ соприкасаются, то два изъ числа корней уравненія $\Delta + \Theta k + \Theta_1 k^2 + \Delta_1 k^3 = 0$ должны сдѣлаться равными, условіемъ чего, какъ извѣстно изъ алгебры, служитъ уравненіе вида:

$$4(\Theta_1^2 - 3\Delta_1\Theta)(\Theta^2 - 3\Delta\Theta_1) = (\Theta\Theta_1 - 9\Delta\Delta_1)^2. \quad (*)$$

Приложимъ послѣднее замѣчаніе къ слѣдующей задачѣ:

Найти геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ можно провести три нормали къ эллипсу.

Обозначая черезъ α и β координаты нѣкоторой точки, принадлежащей искомому геометрическому мѣсту, мы получимъ 4 точки встрѣчи нормалей, проведенныхъ къ эллипсу: $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$ изъ точки (α, β), рѣшая совмѣстно уравненіе эллипса съ уравненіемъ гиперболы:

$$c^2 xy - a^2 \alpha y + b^2 \beta x = 0.$$

Для того, чтобы существовало три нормали, необходимо, чтобы 2 точки пересѣченія эллипса и гиперболы совпадали.

Условіе равенства нулю дискриминанта для пучка, выраженнаго такимъ уравненіемъ:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 - 2k(c^2 xy - a^2 \alpha y + b^2 \beta x) = 0$$

будетъ имѣть видъ:

$$a^2 b^2 + k^2 (a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 - c^4) - 2k^3 \alpha\beta c^2 = 0.$$

Въ этомъ случаѣ $\Theta = 0$ и мы получимъ вмѣсто условія (*) слѣдующее:

$$27\Delta\Delta_1{}^2 + 4\Theta_1{}^3 = 0.$$

Но въ настоящемъ случаѣ послѣднее уравненіе приводится къ такому:

$$(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4\alpha^2\beta^2 = 0$$

Получилась кривая 6-го порядка, называемая *эволютой* эллипса и представляющая собою геометрическое мѣсто центровъ кривизны эллипса (см. § 272).

То же самое можно было бы продѣлать и для параболы $y^2 - 2px = 0$, причемъ получилось бы уравненіе эволюты въ слѣдующемъ видѣ:

$$27py^2 = 8(x-p)^3.$$

Теорія взаимныхъ поляръ.

314. Возьмемъ уравненіе коническаго сѣченія, написанное въ самомъ общемъ видѣ:

$$L_1\alpha^2{}_1 + L_2\alpha^2{}_2 + \ldots + L_n\alpha^2{}_n + M_1\beta_1\gamma_1 + M_2\beta_2\gamma_2 + \ldots + M_m\beta_m\gamma_m +$$
$$+ N_1\delta_1 + N_2\delta_2 + \ldots + N_q\delta_q + P = 0, \qquad (1$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m, \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m, \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_q$ суть нѣкоторыя заданныя функціи первой степени отъ координатъ, вида $ax + by + c$, а $L_1, \ldots M_1, \ldots N_1, \ldots P$ заданные численные коэффиціенты. Очевидно, что уравненіе (1), которое мы для краткости будемъ обозначать такъ:

$$\Sigma L\alpha^2 + \Sigma M\beta\gamma + \Sigma N\delta + P = 0, \quad \text{или} \quad f(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0,$$

будучи, по раскрытіи скобокъ, второй степени относительно координатъ, опредѣляетъ нѣкоторое коническое сѣченіе. Всѣ разсматривавшіяся до сихъ поръ виды уравненія коническаго сѣченія суть частные виды (1):

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Cy + F = 0, \quad \alpha^2 + \beta = 0, \quad L\alpha^2 + \beta^2 + P = 0,$$
$$\alpha\beta = k^2, \quad \beta\gamma - \alpha^2 = 0, \; A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + 2D\alpha\gamma + 2E\beta\gamma + F\gamma^2 = 0,$$
$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0.$$

315. Возьмемъ на коническомъ сѣченіи точку M_0, имѣющую координаты x_0, y_0 и назовемъ результатъ подстановки чиселъ x_0 и y_0 въ функціи $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ черезъ $\alpha^0{}_i, \beta^0{}_i, \gamma^0{}_i, \delta^0{}_i$; тогда, очевидно, числа $\alpha^0{}_i, \beta^0{}_i\, \gamma^0{}_i\, \delta^0{}_i$ будутъ удовлетворять уравненію (1), что мы запишемъ такъ

$$f(\alpha^0, \beta^0, \gamma^0, \delta^0) = \Sigma L\alpha^{02} + \Sigma M\beta^0\gamma^0 + \Sigma N\delta^0 + P = 0 \qquad (2)$$

Вычитая уравненіе (2) изъ уравненія (1), получимъ

$$\Sigma L\,(\alpha^2 - \alpha^{02}) + \Sigma M\,(\beta\gamma - \beta^0\gamma^0) + \Sigma N\,(\delta - \delta^0) = 0;$$

послѣднее уравненіе можно переписать такъ:

$$\Sigma L\,(\alpha - \alpha^0)\,(\alpha + \alpha^0) +$$

$$+ \Sigma M\left[(\beta - \beta^0)\,\frac{\gamma + \gamma^0}{2} + (\gamma - \gamma^0)\,\frac{\beta + \beta^0}{2}\right] + \Sigma N\,(\delta - \delta^0) = 0 \qquad (3)$$

Возьмемъ теперь уравненіе сѣкущей въ видѣ

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots + l_n\alpha_n + k_1\beta_1 + \ldots k_m\beta_m + t_1\gamma_1 + \ldots t_m\gamma_m + s_1\delta_1 + \ldots + s_q\delta_q + r = 0.$$

Это уравненіе напишемъ для краткости такъ

$$\Sigma l\alpha + \Sigma k\beta + \Sigma t\gamma + \Sigma s\delta + r = 0. \qquad (4)$$

Пусть эта сѣкущая проходитъ черезъ точку M_0, тогда будетъ

$$\Sigma\alpha l^0 + \Sigma k\beta^0 + t\,\Sigma\gamma^0 + \Sigma s\delta^0 + r = 0. \qquad (5)$$

Вычитая изъ уравненія (4) уравненіе (5), получимъ уравненіе прямой, проходящей черезъ точку M_0, въ такомъ видѣ

$$\Sigma l\,(\alpha - \alpha^0) + \Sigma k\,(\beta - \beta^0) + \Sigma t\,(\gamma - \gamma^0) + \Sigma s\,(\delta - \delta^0) = 0. \qquad (6)$$

Чтобы найти координаты другой точки пересѣченія хорды (6) съ заданнымъ коническимъ сѣченіемъ, необходимо рѣшить относительно x и y уравненія (3) и (6). Одною парою корней будутъ очевидно, числа x_0, y_0, другая же будетъ зависѣть отъ выбора коэффиціентовъ l_i, k_i, t_i, s_i. Мѣняя эти коэффиціенты, мы будемъ получать безчисленное множество значеній для $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$, соотвѣтствующихъ другой точкѣ сѣченія. Отсюда мы заключаемъ о существованіи пропорцій

$$\frac{l_i}{L_i\,(\alpha_i + \alpha^0{}_i)} = \frac{k_i}{M\,\dfrac{\gamma_i + \gamma_i{}^0}{2}} = \frac{t_i}{M\,\dfrac{\beta_i + \beta_i{}^0}{2}} = \frac{s_i}{N}. \qquad (7)$$

Въ послѣдней пропорціи (7) заключается $n + 2m + q - 1$ уравненій, позволяющихъ, если заданы координаты другой точки сѣченія x_1, y_1, выразить всѣ коэффиціенты l_i, k_i, t_i, s_i, кромѣ одного, черезъ этотъ послѣдній. Слѣдовательно, по сокращеніи уравненія (6) на этотъ послѣдній коэффиціентъ, мы получимъ уравненіе хорды въ окончательномъ видѣ.

Сдѣлаемъ теперь $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, тогда сѣкущая обратится въ касательную и уравненія (7) будутъ имѣть видъ

$$\frac{l_i}{2L_i\,\alpha_i{}^0} = \frac{k_i}{M_i\,\gamma_i{}^0} = \frac{t_i}{M_i\,\beta_i{}^0} = \frac{s_i}{N_i}. \qquad (8)$$

Откуда уравненіе касательной въ точкѣ M_0 будетъ имѣть видъ

$$\Sigma 2L\alpha^0(\alpha-\alpha^0)+\Sigma M\,[\gamma^0(\beta-\beta^0)+(\gamma-\gamma^0)\beta^0]+\Sigma N(\delta-\delta^0)=0, \quad (9)$$

или еще такъ

$$\Sigma 2L\alpha\alpha^0+2M(\beta\gamma^0+\gamma\beta^0)+\Sigma N\delta-2\Sigma L\alpha^{02}-2\Sigma M\beta^0\gamma^0-\Sigma N\delta^0=0.$$

Прибавляя къ послѣднему уравненію удвоенное (2), получаемъ

$$\Sigma 2L\alpha\alpha^0+\Sigma M(\beta\gamma^0+\gamma\beta^0)+\Sigma N\delta+\Sigma N\delta^0+2P=0.$$

И окончательно уравненіе касательной будетъ имѣть видъ

$$\Sigma 2L\alpha\alpha^0+\Sigma M(\beta\gamma^0+\gamma\beta^0)+\Sigma N(\delta+\delta^0)+2P=0. \quad (10)$$

316. Если точка M_0 не лежитъ на коническомъ сѣченіи (1), тогда (10) будетъ поляра точки M_0. Въ самомъ дѣлѣ, пусть точка касанія касательной, проведенной черезъ M_0, будетъ M_1 съ координатами x_1, y_1; тогда касательная будетъ имѣть уравненіе

$$\Sigma 2L\alpha\alpha'+\Sigma M(\beta\gamma'+\gamma\beta')+\Sigma N(\delta+\delta')+2P=0, \quad (11)$$

причемъ $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i, \delta'_i$ суть результаты подстановки чиселъ x_1, y_1 въ функціи $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$. Точка M_1 лежитъ на кривой, слѣдовательно, удовлетворяется уравненіе

$$\Sigma L\alpha'^2+\Sigma M\beta'\gamma'+\Sigma N\delta'+P=0. \quad (12)$$

Для того чтобы касательная проходила черезъ заданную точку M_0, необходимо, чтобы координаты этой послѣдней точки удовлетворяли уравненію (11) этой касательной. Получимъ условіе

$$\Sigma 2L\alpha'\alpha^0+\Sigma M(\beta^0\gamma'+\gamma^0\beta')+\Sigma(\delta^0+\delta')+2P=0. \quad (13)$$

Итакъ мы видимъ, что координаты x_1, y_1 точки касанія найдемъ какъ общія рѣшенія двухъ уравненій: одного второй степени (12), а другого первой (13). Отбросивъ штрихи надъ буквами, мы замѣчаемъ, что уравненіе (12) совпадаетъ съ уравненіемъ (1), а уравненіе (13) съ уравненіемъ (10). Слѣдовательно уравненіе (10) въ данномъ случаѣ опредѣляетъ прямую, на пересѣченіи которой съ кривою (1) лежатъ точки касанія двухъ касательныхъ, проведенныхъ къ коническому сѣченію черезъ точку M_0. Уравненіе (10) имѣетъ мѣсто, гдѣ бы ни была задана точка M_0 и опредѣляетъ, слѣдовательно, всегда нѣкоторую прямую линію, называемую *полярою* точки M_0. Точка же M_0 по отношенію къ полярѣ называется *полюсомъ*. Какъ частный случай получимъ тѣ виды уравненія поляръ, которыя мы уже писали:

1) $\alpha^2+\beta=0,\qquad 2\alpha\alpha_0+\beta+\beta_1=0$

2) $L\alpha^2+\beta^2+P=0,\qquad 2L\alpha\alpha_0+2\beta\beta_0+2P=0$

3) $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=f(x,y,z)=0,$

$$2Axx_0+2B(xy_0+yx_0)+2Cyy_0+2D(xz_0+x_0z)+2E(yz_0+y_0z)+2Fzz_0=0.$$

Это уравненіе по сокращеніи на 2 можно переписать такъ

$$\frac{\partial f}{\partial x}x_0+\frac{\partial f}{\partial y}y_0+\frac{\partial z}{\partial z}z_0=0.$$

4) $\quad L\alpha^2+M\beta^0+N\gamma^2=0, \qquad L\alpha\alpha_0+M\beta\beta_0+N\gamma\gamma_0=0$

5) $\quad \beta\gamma-\alpha^2=0, \qquad \beta\gamma_0+\gamma\beta_0-2\alpha\alpha_0=0$

6) $\quad \alpha\beta-k^2=0, \qquad \alpha\beta_0+\alpha_0\beta-2k^2=0.$

317. *Основная теорема.* Поляры всѣхъ точекъ прямой проходятъ черезъ полюсъ этой прямой и обратно, полюсы всѣхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ одну точку, находятся на полярѣ этой точки.

Возьмемъ уравненіе коническаго сѣченія въ видѣ:

$$L\alpha^2+M\beta^2+N\gamma^2=0.$$

Первая часть нашей теоремы была уже доказана въ § 258, но въ виду важности этой теоремы мы повторимъ доказательство, нѣсколько видоизмѣнивъ его.

Пусть будетъ задана нѣкоторая прямая

$$l\alpha+m\beta+n\gamma=0;$$

полюсъ этой прямой имѣетъ координаты

$$\frac{l}{L},\ \frac{m}{M},\ \frac{n}{N}\ \text{(см. § 258).}$$

Въ этомъ легко убѣдиться слѣдующимъ образомъ. Обозначимъ искомыя координаты полюса черезъ α_1, β_1, γ_1; получимъ уравненіе поляры этого полюса въ видѣ:

$$L\alpha_1\alpha+M\beta_1\beta+N\gamma_1\gamma=0.$$

Ясно, что эта поляра должна совпадать съ данной прямой; слѣдовательно, должна существовать пропорція

$$\frac{L\alpha_1}{l}=\frac{M\beta_1}{m}=\frac{N\gamma_1}{n};$$

откуда и получаются указанныя выше координаты.

Разсмотримъ теперь нѣкоторую совершенно произвольную точку на заданной прямой съ координатами α_0, β_0, γ_0. Ясно, что должно удовлетворяться условіе

$$l\alpha_0+m\beta_0+n\gamma_0=0. \tag{*}$$

Поляра точки α_0, β_0, γ_0 имѣетъ уравненіе:

$$L\alpha_0\alpha+M\beta_0\beta+N\gamma_0\gamma=0. \tag{**}$$

Будемъ теперь брать различныя точки на заданной прямой, другими словами, брать различныя числа α_0, β_0, γ_0, удовлетворяющія условію (*). Тогда поляра (**) всегда будетъ проходить черезъ точку $\frac{l}{L}$, $\frac{m}{M}$, $\frac{n}{N}$, что слѣдуетъ изъ того, что по подстановкѣ въ уравненіе (**) вмѣсто α, β, γ чиселъ $\frac{l}{L}$, $\frac{m}{M}$, $\frac{n}{N}$, послѣднее обращается въ уравненіе (*).

318. Подобнымъ же образомъ легко доказать и обратное предложеніе.

Пусть точка, черезъ которую проходятъ разсматриваемыя поляры, имѣетъ координаты a_1, b_1, c_1 *). Тогда уравненіе каждой изъ поляръ можетъ быть написано въ видѣ

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

гдѣ коэффиціенты l, m, n должны удовлетворять условію:

$$la_1 + mb_1 + nc_1 = 0. \tag{*}$$

Поляра заданной точки a_1, b_1, c_1 есть

$$La_1\alpha + Mb_1\beta + Nc_1\gamma = 0. \tag{**}$$

Ясно, что полюсъ $\frac{l}{L}$, $\frac{m}{M}$, $\frac{n}{N}$ всякой прямой $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$, проведенной черезъ заданную точку, будетъ лежать на прямой (**), ибо его координаты по подстановкѣ въ уравненіе (**) обращаютъ его въ уравненіе (*).

Какъ слѣдствіе этой основной теоремы получается слѣдующее замѣчаніе: прямая, соединяющая двѣ точки M и M_1, имѣетъ полюсомъ точку пересѣченія поляръ точекъ M и M_1.

319. Мы видѣли уже (§ 286), что полярою центра является безконечно далекая прямая и наоборотъ, поляра всякой безконечно далекой точки проходитъ черезъ центръ коническаго сѣченія и есть, слѣдовательно, діаметръ его. Что же касается параболы, то, хотя центръ ея лежитъ на безконечно далекой прямой, все же діаметры ея имѣютъ полюсами безконечно далекія точки.

320. Поляра точки a_1, b_1, c_1 параллельна діаметру, сопряженному съ діаметромъ, проходящимъ черезъ эту точку.

Уравненіе діаметра, проходящаго черезъ заданную точку, имѣетъ видъ

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

гдѣ l, m, n суть коэффиціенты, удовлетворяющіе двухъ условіямъ:

$$la_1 + mb_1 + nc_1 = 0 \tag{1}$$

$$l\frac{a}{L} + m\frac{b}{M} + n\frac{c}{N} = 0. \tag{2}$$

*) Чтобы не смѣшивать съ обозначеніемъ a, b, c, принятымъ нами для сторонъ координатнаго треугольника.

Поляра точки a_1, b_1, c_1 имѣетъ уравненіе:

$$La_1\alpha + Mb_1\beta + Nc_1\gamma = 0.$$

Проведемъ черезъ центръ прямую, параллельную этой полярѣ, и докажемъ, что эта прямая будетъ діаметромъ, сопряженнымъ съ указаннымъ діаметромъ.

Общее уравненіе прямыхъ параллельныхъ имѣетъ видъ:

$$La_1\alpha + Mb_1\beta + Nc_1c - k(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0.$$

Надо опредѣлить k подъ тѣмъ условіемъ, чтобы это уравненіе удовлетворялось координатами центра: $\frac{a}{L}$, $\frac{b}{M}$, $\frac{c}{N}$. Находимъ:

$$k = \frac{aa_1 + bb_1 + cc_1}{\frac{a^2}{L} + \frac{b^2}{M} + \frac{c^2}{N}}.$$

Въ случаѣ параболы k равно ∞ и получается безконечно далекая прямая.

Итакъ мы видимъ, что прямая, проведенная черезъ центръ параллельно полярѣ (3), имѣетъ видъ:

$$l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0,$$

гдѣ $\quad l_1 = La_1 - ka; \quad m_1 = Mb_1 - kb; \quad n_1 = Nc_1 - kc.$

Умножая первое изъ этихъ равенствъ на $\frac{l}{L}$, второе на $\frac{m}{M}$, третье на $\frac{n}{N}$, получимъ:

$$\frac{ll_1}{L} + \frac{mm_1}{M} + \frac{nn_1}{N} = la_1 + mb_1 + nc_1 - k\left(l\frac{a}{L} + m\frac{b}{M} + n\frac{c}{N}\right).$$

Отсюда, на основаніи равенствъ (1) и (2), получаемъ равенство

$$\frac{ll_1}{L} + \frac{mm_1}{M} + \frac{nn_1}{N} = 0.$$

На основаніи же соображеній § 287 замѣчаемъ, что прямая

$$l_1\alpha + m_1\beta + n_1c = 0$$

есть сопряженный діаметръ, что и требовалось доказать.

Послѣднее замѣчаніе можно короче высказать такъ: полюсъ каждаго діаметра лежитъ на діаметрѣ сопряженномъ.

321. Указанная взаимность поляръ не ограничивается, впрочемъ, приведенными свойствами ихъ, но идетъ гораздо глубже и можетъ быть поставлена въ связь съ общимъ закономъ двойственности координатъ, о которомъ мы уже упоминали.

Задавая координаты полюса, мы тѣмъ самымъ задаемъ уравненіе поляры, а потому эти же самыя координаты могутъ быть разсматриваемы какъ линейныя координаты поляры.

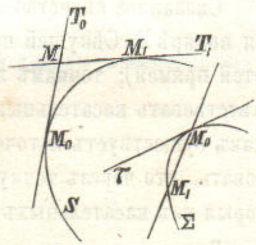
Геометрическимъ теоремамъ относительно точекъ будутъ соотвѣтствовать аналогичныя теоремы, получающіяся черезъ замѣну точекъ ихъ полярами и обратно, прямыхъ линій—полюсами.

Въ § 65 мы доказали, что уравненіе первой степени въ линейныхъ координатахъ опредѣляетъ точку; это теперь слѣдуетъ изъ того, что если возьмемъ декартовы координаты полюса x_1, y_1 и будемъ ихъ считать линейными координатами соотвѣтствующей поляры, то уравненіе

$$lx_1 + my_1 + n = 0 \tag{1}$$

можемъ считать опредѣляющимъ полюсъ линіи, опредѣляемой этимъ уравненіемъ въ декартовыхъ координатахъ, ибо черезъ этотъ полюсъ проходятъ поляры, опредѣляемыя линейными координатами x_1, y_1, удовлетворяющими уравненію (1).

322. Возьмемъ теперь какую нибудь кривую S и проведемъ въ нѣкоторой точкѣ M_0, принадлежащей этой кривой, касательную M_0T_0; пусть полюсомъ этой касательной относительно нѣкотораго коническаго сѣченія будетъ нѣкоторая точка M_0 (см. черт. 131). Проведемъ теперь касательную M_1T_1 къ S въ сосѣдней, достаточно близкой къ M_0, точкѣ M_1; полюсъ этой касательной будетъ нѣкоторая точка M_1 вблизи точки M_0. Приближая теперь точку M_1 къ точкѣ M_0, мы заставимъ касательную M_1T_1 стремиться къ совпаденію съ касательною M_0T_0 и точку M_1 съ точкою M_0. При сказанномъ перемѣщеніи точка M_1 описываетъ нѣкоторую кривую Σ, которую будемъ называть полярою кривой S.



Черт. 131.

Итакъ мы видимъ, что поляра Σ кривой S есть геометрическое мѣсто полюсовъ разныхъ касательныхъ кривой S.

323. Докажемъ теперь, что, обратно, полярою кривой Σ относительно того же коническаго сѣченія будетъ кривая S.

Возьмемъ двѣ точки M_0 и M_1 на кривой Σ (см. черт. 131); имъ соотвѣтствуютъ двѣ касательныя M_0T_0, M_1T_1 кривой S. Точка пересѣченія M этихъ касательныхъ есть полюсъ хорды $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1$ (см. § 318). Будемъ теперь приближать точку M_1 къ точкѣ M_0; хорда $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1$ будетъ стремиться совпасть съ касательною $\mathrm{M}_0\tau$ кривой Σ въ точкѣ M_0. Полюсъ хорды $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1$, или точка M, будетъ стремиться къ совпаденію съ точкою M_0, что показываетъ, что полюсъ касательной къ кривой Σ лежитъ на кривой S, что и требовалось доказать.

324. Итакъ мы видимъ, что между двумя кривыми S и Σ существуетъ взаимность, состоящая въ томъ, что каждая изъ нихъ есть поляра другой. Кривыя S и Σ называются *взаимными полярами*.

325. Теорія взаимныхъ поляръ позволяетъ замѣтить законъ двойственности во всей его полнотѣ и общности.

Всякое уравненіе $f(x, y) = 0$ можно разсматривать съ двухъ точекъ зрѣнія: во-первыхъ, какъ опредѣляющее въ декартовыхъ координатахъ нѣкоторую кривую S; во-вторыхъ, какъ опредѣляющее въ линейныхъ координатахъ другую кривую Σ, поляру первой; причемъ координаты x_1, y_1, удовлетворяющія уравненію $f(x, y)$ мы разсматриваемъ какъ координаты нѣкоторой касательной къ кривой Σ; эта касательная есть поляра точки, опредѣляемой въ декартовыхъ координатахъ числами x_1, y_1. Поэтому линейныя координаты иногда называются *касательными* или *тангенціальными координатами*.

326. Кривую Σ называютъ *оберткою* (*огибающею*, enveloppe, Einhüllende Curve) поляръ точекъ, лежащихъ на кривой S.

327. Въ дальнѣйшемъ, разсматривая кривыя линіи, опредѣляемыя уравненіями третьей, четвертой и еще болѣе высокихъ степеней, мы всегда будемъ называть *порядкомъ* линіи степень опредѣляющаго ея уравненія и докажемъ, что кривая n-го порядка пересѣкается прямою въ n дѣйствительныхъ или мнимыхъ точкахъ.

Сказанное свойство линіи n-го порядка S отразится слѣдующимъ образомъ на ея полярѣ Σ. Сѣкущей прямой будетъ соотвѣтствовать нѣкоторая точка P (полюсъ этой прямой); точкамъ же встрѣчи сѣкущей съ заданною кривою S будутъ соотвѣтствовать касательныя поляры Σ, проходящія, конечно, черезъ точку P. Такъ какъ существуетъ n точекъ встрѣчи сѣкущей съ кривою S, то отсюда будетъ слѣдовать, что черезъ точку P проходятъ n касательныхъ поляры Σ. Конечно, нѣкоторыя изъ касательныхъ могутъ быть мнимыми, а также совпадающими.

Будемъ называть *классомъ* кривой линіи число касательныхъ, которыя можно провести изъ всякой внѣшней точки къ кривой.

Отсюда мы видимъ, что полярою кривой n-го порядка всегда является кривая n-го класса и наоборотъ, полярою кривой n-го класса будетъ кривая n-го порядка

328. Вышеприведенныхъ соображеній достаточно, чтобы убѣдиться, что полярою всякаго коническаго сѣченія будетъ тоже коническое сѣченіе, ибо коническое сѣченіе есть линія второго порядка и класса. Покажемъ это непосредственно.

Пусть уравненіе основного коническаго сѣченія имѣетъ видъ:

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + 2D\alpha\gamma + 2E\beta\gamma + F\gamma^2 = 0.$$

Найдемъ уравненіе взаимной поляры коническаго сѣченія

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0. \qquad (1)$$

Возьмемъ какую нибудь точку $M_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, лежащую на послѣднемъ коническомъ сѣченіи; такъ что

$$L\alpha_0{}^2 + M\beta_0{}^2 + N\gamma_0{}^2 = 0.$$

Касательная въ точкѣ M_0 линіи (1) имѣетъ уравненіе

$$L\alpha_0\alpha + M\beta_0\beta + N\gamma_0\gamma = 0. \tag{2}$$

Обозначая координаты полюса этой прямой (конечно, по отношенію къ основному коническому сѣченію) черезъ α_1, β_1, γ_1, мы ихъ получимъ, сравнивая коэффиціенты уравненія (2) и уравненія

$$(A\alpha_1 + B\beta_1 + D\gamma_1)\,\alpha + (B\alpha_1 + C\beta_1 + E\gamma_1)\,\beta + D\alpha_1 + E\beta_1 + F\gamma_1 = 0.$$

Остается выразить α_0, β_0, γ_0 черезъ α_1, β_1, γ_1, подставить полученныя выраженія въ уравненіе $L\alpha_0{}^2 + M\beta_0{}^2 + N\gamma_0{}^2 = 0$ и уничтожить значки при буквахъ α_1, β_1, γ_1. Продѣлавъ сказанное, получаемъ окончательное уравненіе взаимной поляры коническаго сѣченія (1) въ такомъ видѣ:

$$\frac{(A\alpha + B\beta + D\gamma)^2}{L} + \frac{(B\alpha + C\beta + E\gamma)^2}{M} + \frac{(D\alpha + E\beta + F\gamma)^2}{N} = 0. \tag{3}$$

Въ случаѣ, если одинъ изъ коэффиціентовъ L, M, N равенъ нулю, заданное уравненіе (1) представляетъ двѣ прямыя. Въ этомъ случаѣ полярою будутъ двѣ точки.

Разсматривая уравненіе (3), мы замѣчаемъ, что для поляры автополярнымъ треугольникомъ является слѣдующій:

$$A\alpha + B\beta + D\gamma = 0$$
$$B\alpha + C\beta + E\gamma = 0$$
$$D\alpha + E\beta + F\gamma = 0$$

Этотъ треугольникъ, какъ легко замѣтить, есть взаимный треугольника: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

329. Всякія два коническихъ сѣченія имѣютъ всегда одинъ общій автополярный треугольникъ. Вершинами этого треугольника являются точки встрѣчи трехъ паръ общихъ хордъ (см. §§ 239 и 263).

Двѣ стороны такого автополярнаго треугольника мнимы, если основное коническое сѣченіе и разсматриваемое имѣютъ только двѣ дѣйствительныя точки пересѣченія.

Если мы не будемъ стѣсняться введеніемъ въ разсмотрѣніе мнимыхъ точекъ и прямыхъ, то можемъ упростить вышеприведенное разсмотрѣніе отнесеніемъ основного коническаго сѣченія къ общему автополярному треугольнику съ даннымъ. Тогда его уравненіе будетъ имѣть видъ:

$$L_1\alpha^2 + M_1\beta^2 + N_1\gamma^2 = 0;$$

такъ что

$$A = L_1,\ B = 0,\ C = M_1,\ D = 0,\ E = 0,\ F = N_1.$$

Тогда уравненіе взаимной поляры (3) (см. § 228) будетъ имѣть видъ:

$$\frac{L_1^2}{L}\alpha^2 + \frac{M_1^2}{M}\beta^2 + \frac{N_1^2}{N}\gamma^2 = 0. \tag{*}$$

Это уравненіе показываетъ, что взаимная поляра имѣетъ тотъ же автополярный треугольникъ.

330. Отсюда легко замѣтить слѣдующее: Если центръ основного коническаго сѣченія лежитъ на заданной линіи:

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0, \tag{1}$$

то взаимная поляра парабола.

Координаты центра основнаго коническаго сѣченія суть: $\frac{a}{L_1}, \frac{b}{M_1}, \frac{c}{N_1}$. Подставляя ихъ въ уравненіе (1), получимъ равенство:

$$\frac{a^2}{\frac{L_1^2}{L}} + \frac{b^2}{\frac{M_1^2}{M}} + \frac{c^2}{\frac{N_1^2}{N}} = 0,$$

выражающее (см. § 255) условіе того, что взаимная поляра (*) (см. § 329) — парабола.

Сказанное, впрочемъ, очевидно изъ геометрическихъ соображеній, ибо, если центръ O основной кривой будетъ находиться внѣ заданной кривой S, то изъ этой точки можно будетъ провести двѣ дѣйствительныя касательныя къ кривой S; такъ какъ полюсы этихъ касательныхъ удаляются въ безконечность, то заключаемъ, что кривая Σ имѣетъ безконечныя вѣтви по двумъ различнымъ направленіямъ; слѣдовательно, это есть гипербола. Если центръ O основнаго коническаго сѣченія находится на кривой S, то обѣ касательныя совпадаютъ и, слѣдовательно, двѣ соотвѣтственныя безконечно далекія точки взаимной поляры сливаются въ одну и тогда кривая Σ парабола. Наконецъ, если центръ O лежитъ внутри заданной кривой S, такъ что черезъ него можно провести только двѣ мнимыя касательныя, то кривая Σ—эллипсъ.

331. Итакъ мы видимъ, что способъ взаимныхъ поляръ связываетъ двѣ фигуры такимъ образомъ, что каждой точкѣ одной изъ нихъ соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленная прямая другой и наоборотъ. Поэтому этотъ способъ можетъ быть разсматриваемъ, какъ нѣкоторое обобщеніе понятія о гомографіи и инволюціи прямолинейныхъ рядовъ точекъ и пучковъ, изложеннаго въ §§ 66 и 78. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли тамъ, что если заданы два ряда точекъ, расположенныхъ на нѣкоторой прямой линіи, то положеніе точки, принадлежащей одному ряду, можно опредѣлить величиной параметра λ, такъ сказать координатою этой точки. Подобнымъ же образомъ точка, принадлежащая другой системѣ, можетъ быть опредѣлена другой координатной μ. Гомографическая зависимость такихъ двухъ рядовъ точекъ задается

уравненіемъ первой степени относительно обѣихъ координатъ λ и μ:

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0 \text{ (см. § 66).}$$

332. Представимъ теперь себѣ двѣ плоскости, заполненныя точками, причемъ точки одной плоскости пусть опредѣляются координатами x и y, а точки другой координатами X и Y. Между двумя указанными системами точекъ поставимъ зависимость, выражаемую общимъ уравненіемъ первой степени относительно тѣхъ и другихъ координатъ. Общій видъ такого уравненія есть:

$$(l_1 x + m_1 y + n_1) X + (l_2 x + m_2 y + n_2) Y + l_3 x + m_3 y + n_3 = 0. \quad (*)$$

333. Зависимость (Reciprocität), выражаемая уравненіемъ (*) приводится къ тому, что каждой точкѣ x_0, y_0 одной системы соотвѣтствуетъ прямая линія другой плоскости:

$$LX + MY + N = 0,$$

гдѣ $L = l_1 x_0 + m_1 y_0 + n_1$, $M = l_2 x_0 + m_2 y_0 + n_2$, $N = l_3 x_0 + m_3 y_0 + n_3$, и обратно, всякой прямой

$$lx + my + n = 0$$

будетъ соотвѣтствовать въ другой системѣ точка, имѣющая координаты X, Y, опредѣляемыя изъ уравненій:

$$\frac{l_1 X + l_2 Y + l_3}{l} = \frac{m_1 X + m_2 Y + m_3}{m} = \frac{n_1 X + n_2 Y + n_3}{n}.$$

Послѣднія два уравненія даютъ координаты искомой точки X, Y.

Конечно, для того, чтобы прямая

$$LX + MY + N = 0$$

могла совпадать со всякою прямою плоскости, необходимо, чтобы опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} l_1, & m_1, & n_1 \\ l_2, & m_2, & n_2 \\ l_3, & m_3, & n_3 \end{vmatrix}$$

не равнялся нулю, ибо въ противномъ случаѣ нельзя по коэффиціентамъ L, M, N опредѣлить соотвѣтственныхъ координатъ x_0, y_0; а тогда для прямой одной системы или нѣтъ соотвѣтствующей точки другой, или же этихъ точекъ безчисленное множество. Въ этомъ случаѣ прямой одной системы будетъ соотвѣтствовать прямая другой и получаются два гомографическихъ пучка. Въ самомъ дѣлѣ, если указанный выше опредѣлитель равенъ нулю, тогда въ уравненіи (*), которое можно написать такъ

$$\alpha X + \beta Y + \gamma = 0$$

прямыя $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ или совпадаютъ или пересѣкаются въ одной точкѣ.

Ясно, что перваго случая разсматривать совсѣмъ не надо; что же касается второго, то: $\gamma = k\alpha + q\beta$; отсюда: $\alpha(X+k)+\beta(Y+q)=0$. Обозначая $X+k$ черезъ δ, а $Y+q$ черезъ ε, получимъ два гомографическихъ пучка: $\delta-\lambda\varepsilon=0$ и $\alpha-\mu\beta=0$; причемъ $1+\lambda\mu=0$.

334. Будемъ два соотвѣтственные элемента, т. е. точку одной системы и прямую другой, называть *двойными*, если при наложенiи двухъ плоскостей одна на другую точка ложится на соотвѣтствующую ей прямую.

Покажемъ, какъ найти двойные элементы двухъ совмѣщенныхъ плоскостей.

Пусть плоскости такъ наложены, что совпали прямоугольныя системы x, y и X, Y обѣихъ изъ нихъ. Возьмемъ какую нибудь точку x_0, y_0 одной системы; тогда въ другой системѣ ей соотвѣтствуетъ прямая

$$(l_1 x_0 + m_1 y_0 + n_1) X + (l_2 x_0 + m_2 y_0 + n_2) Y + l_3 x_0 + m_3 y_0 + n_3 = 0.$$

Если заданная точка лежитъ на соотвѣтствующей ей прямой, то координаты x_0, y_0 удовлетворяютъ уравненiю и мы получаемъ:

$$(l_1 x_0 + m_1 y_0 + n_1) x_0 + (l_2 x_0 + m_2 y_0 + n_2) y_0 + l_3 x_0 + m_3 y_0 + n_3 = 0.$$

Послѣднее уравненiе есть уравненiе коническаго сѣченiя

$$l_1 x_0^2 + (m_1 + l_2) x_0 y_0 + m_2 y_0^2 + (n_1 + l_3) x_0 + (n_2 + m_3) y_0 + n_3 = 0. \quad (1)$$

Итакъ мы видимъ, что двойные элементы суть точки на коническомъ сѣченiи и касательныя къ нему; причемъ сказанное имѣетъ мѣсто, считаемъ ли мы координаты x_0, y_0 принадлежащими той или другой системѣ.

335. Будемъ два соотвѣтственныхъ элемента, точку P и прямую L, называть *взаимными*, если точкѣ P, какъ принадлежащей первой системѣ, соотвѣтствуетъ прямая L второй системы и прямой L, разсматриваемой, какъ элементъ первой системы, та же самая точка P, разсматриваемая, какъ принадлежащая другой системѣ.

Мы покажемъ, что существуютъ три пары такихъ взаимныхъ элементовъ, или же всѣ пары сопряженныхъ элементовъ взаимныя; тогда такое соотвѣтствiе называется *инволюцiоннымъ соотвѣтствiемъ* двухъ системъ (Involutorische Lage der Reciprocität).

Обозначимъ координаты точки P первой системы черезъ x_0, y_0. Уравненiе соотвѣтствующей ей прямой L другой системы имѣетъ видъ:

$$(l_1 x_0 + m_1 y_0 + n_1) X + (l_2 x_0 + m_2 y_0 + n_2) Y + l_3 x_0 + m_3 y_0 + n_3 = 0.$$

Разсматривая эту прямую, какъ принадлежащую первой системѣ, получимъ уравненiе:

$$(l_1 x_0 + m_1 y_0 + n_1) x + (l_2 x_0 + m_2 y_0 + n_2) y + l_3 x_0 + m_3 y_0 + n_3 = 0.$$

Соотвѣтствующая ей точка другой системы опредѣлится на основанiи § 333 при помощи уравненiй:

$$\frac{l_1 X + l_2 Y + l_3}{l_1 x_0 + m_1 y_0 + n_1} = \frac{m_1 X + m_2 Y + m_3}{l_2 x_0 + m_2 y_0 + n_2} = \frac{n_1 X + n_2 Y + n_3}{l_3 x_0 + m_3 y_0 + n_3} = \rho,$$

гдѣ черезъ ρ означена общая величина этихъ отношенiй. Для того, чтобы послѣднiя уравненiя опредѣлили ту же самую точку P, необходимо подставить въ нихъ вмѣсто X, Y величины x_0, y_0, для опредѣленiя которыхъ и числа ρ получимъ три уравненiя:

$$\left.\begin{aligned} l_1 x_0 + l_2 y_0 + l_3 &= \rho\,(l_1 x_0 + m_1 y_0 + n_1) \\ m_1 x_0 + m_2 y_0 + m_3 &= \rho\,(l_2 x_0 + m_2 y_0 + n_2) \\ n_1 x_0 + n_2 y_0 + n_3 &= \rho\,(l_3 x_0 + m_3 y_0 + n_3) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Исключая изъ этихъ трехъ уравненiй x_0, y_0, получимъ слѣдующее кубическое уравненiе для ρ:

$$\begin{vmatrix} l_1(1-\rho), & l_2 - \rho m_1, & l_3 - n_1\rho \\ m_1 - l_2\rho, & m_2(1-\rho), & m_3 - n_2\rho \\ n_1 - l_3\rho, & n_2 - m_3\rho, & n_3(1-\rho) \end{vmatrix} = 0.$$

Послѣднее уравненiе даетъ для ρ три значенiя: ρ_1, ρ_2, ρ_3. Каждому изъ этихъ значенiй соотвѣтствуетъ своя пара взаимныхъ элементовъ.

Существуетъ одинъ случай, а именно: $m_1 = l_2$, $n_1 = l_3$, $n_2 = m_3$; тогда послѣднее уравненiе даетъ для ρ три корня, равныхъ единицѣ, послѣ подставки которыхъ въ уравненiя (1) послѣднiя обращаются въ тождества и оставляютъ координаты x_0, y_0 совершенно произвольными. Въ этомъ случаѣ получается сказанная инволюцiонная зависимость. Основное коническое сѣченiе въ этомъ случаѣ обращается въ слѣдующее:

$$l_1 x_0^2 + 2m_1 x_0 y_0 + m_2 y_0^2 + 2n_1 x_0 + 2n_2 y_0 + n_3 = 0$$

(см. уравненiе (1) § 234), а уравненiе, выражающее соотвѣтствiе двухъ плоскостей обращается въ уравненiе поляры послѣдняго коническаго сѣченiя:

$$(l_1 x + m_1 y + n_1)\,X + (m_1 x + m_2 y + n_2)\,Y + n_1 x + n_2 y + n_3 = 0.$$

Итакъ мы видимъ, что методъ взаимныхъ поляръ, служащiй для преобразованiя фигуръ, есть не что иное, какъ инволюцiонный случай болѣе общаго однозначнаго соотвѣтствiя (Reciprocität) точекъ двухъ плоскостей.

336. Не слѣдуетъ думать, что случай инволюцiи есть случай особенный. Оказывается, что при помощи поступательнаго перемѣщенiя и нѣкотораго вращенiя одной изъ плоскостей, находящихся въ указанномъ соотвѣтствiи, можно привести эту плоскость къ инволюцiонному совпаденiю съ другой.

Для сказанной цѣли надо будетъ x и y въ уравненiи, выражающемъ законъ соотвѣтствія, замѣнить на $a + x\cos\varphi - y\sin\varphi$, $b + x\sin\varphi + y\cos\varphi$. Тогда новое уравненіе соотвѣтствія будетъ имѣть видъ:

$$(L_1x + M_1y + N_1)\,X + (L_2x + M_2y + N_2)\,Y + L_3x + M_3y + N_3 = 0.$$

Двѣ координаты новаго начала a и b и уголъ φ надо будетъ опредѣлить изъ того условія, чтобы было $M_1 = L_2$, $N_1 = L_3$, $M_3 = N_2$.

337. Возвратимся къ методу взаимныхъ поляръ. Способъ этотъ даетъ возможность изъ одной геометрической теоремы получать другую ей соотвѣтствующую. Подобныя теоремы называются *коррелативными*. Примѣрами такихъ теоремъ могутъ служить слѣдующія:

I. Если двѣ вершины треугольника двигаются по даннымъ прямымъ, а стороны его проходятъ черезъ три точки, лежащія на одной прямой, то третья вершина описываетъ прямую. (См. зад. 6 стр. 56).	I. Если двѣ стороны треугольника вращаются около двухъ данныхъ точекъ, а вершины его перемѣщаются по тремъ прямымъ, проходящимъ черезъ одну точку, то третья сторона вращается около нѣкоторой точки.
II. Двѣ произвольныя точки и четыре точки прикосновенія касательныхъ, проведенныхъ изъ этихъ точекъ къ данному эллипсу, лежатъ на одной кривой второго порядка. (См. § 291).	II. Двѣ хорды эллипса и четыре касательныя къ нему въ концахъ этихъ хордъ, касаются нѣкоторой линіи второго порядка.

338. Докажемъ теперь двѣ весьма важныя коррелативныя теоремы: Паскаля и Бріаншона, которыя по справедливости можно назвать основными въ теоріи коническихъ сѣченій.

Теорема Паскаля (Hexagrammum mysticum). Противоположныя стороны: 12 и 45; 23 и 56; 34 и 61 (см. черт. 132, 133) шестиугольника, вписаннаго въ коническое сѣченіе, пересѣкаются въ трехъ точкахъ A, B, C, лежащихъ на одной прямой.

Пусть будутъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ уравненія сторонъ 12, 23, 34 и пусть $I = 0$ уравненіе прямой, соединяющей вершины 1 и 4. Кромѣ того, пусть уравненія $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$ опредѣляютъ 45, 56, 61. Такъ какъ заданное коническое сѣченіе описано около двухъ четыреугольниковъ $(\alpha\,\beta\,\gamma\,I)$ и $(\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\,I,)$ то уравненіе его можетъ быть представлено въ двухъ слѣдующихъ видахъ:

$$l\beta I - k\alpha\gamma = 0 \text{ и } l_1\beta_1 I - k_1\alpha_1\gamma_1 = 0.$$

Послѣднія два уравненія тождественны. Вычитая второе уравненіе изъ перваго, получимъ тождество

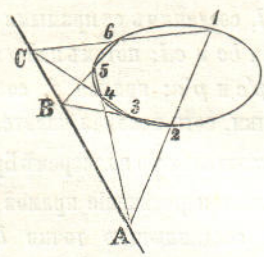
$$l\beta I - l\beta_1 I - (k\alpha\gamma - k_1\alpha_1\gamma_1) = 0.$$

Послѣднее тождество можетъ быть разбито на два равносильныхъ уравненія

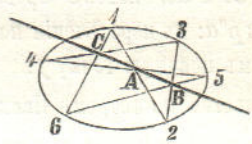
$$l\beta I - l_1\beta_1 I = 0, \qquad (1)$$

$$k\alpha\gamma - k_1\alpha_1\gamma_1 = 0. \qquad (2)$$

Уравненія (1) и (2) опредѣляютъ одно и то же геометрическое мѣсто. Это мѣсто состоитъ изъ двухъ прямыхъ $I = 0$, $l\beta - l_1\beta_1 = 0$. Тѣ же двѣ прямыя должно, очевидно, опредѣлять и уравненіе (2); но мы знаемъ, что это послѣднее уравненіе, если только оно опредѣляетъ двѣ прямыя, должно давать линіи, соединяющія точки встрѣчи прямыхъ α, γ съ прямыми α_1, γ_1. Но легко видѣть, что сказанныя двѣ



Черт. 132.



Черт. 133.

прямыя суть: $I = 0$ и прямая AC; слѣдовательно, прямая AC опредѣляется уравеніемъ (2), которое показываетъ, что она проходитъ черезъ точку B встрѣчи прямыхъ β и β_1, что и требовалось доказать.

Теоремѣ Паскаля соотвѣтствуетъ, какъ коррелативная,

Теорема Бріаншона. Діагонали шестиугольника, описаннаго около коническаго сѣченія, встрѣчаются въ одной точкѣ.

Здѣсь разумѣются, конечно, діагонали, соединяющія противоположныя вершины шестиугольника 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6.

339. Изъ теоремы Паскаля можетъ быть выведена вся теорія коническихъ сѣченій. Въ особенности замѣчательны ея приложенія къ построенію коническихъ сѣченій по точкамъ и по касательнымъ. Въ наиболѣе интересныхъ задачахъ это построеніе можетъ быть совершено при помощи одной линейки.

340. Если двѣ вершины вписаннаго шестиугольника совпадаютъ, то получается аналогичная теорема для пятиугольника, причемъ надо замѣнить пропавшую при совпаденіи вершинъ сторону касательною.

341. Сказанное въ предыдущемъ параграфѣ, на основаніи закона двойственности, относится къ коррелативной теоремѣ Бріаншона, причемъ шестиугольникъ при совпаденіи двухъ его сторонъ превращается въ описанный пятиугольникъ, за одну изъ вершинъ котораго придется принять точку касанія той стороны, въ которой совпали двѣ стороны шестиугольника.

342. Приведемъ рядъ основныхъ задачъ такого рода, рѣшаемыхъ при помощи одной только линейки.

Задачи на построеніе линій второго порядка по точкамъ и касательнымъ.

1) По даннымъ пяти точкамъ: a, b, c, d, e линіи 2-го порядка найти какую нибудь шестую точку этой линіи и построить касательную въ этой точкѣ.

Рѣш. Чрезъ пересѣченіе p прямыхъ ab и de проведемъ произвольную прямую l; найдемъ пересѣченія p' и p'' этой прямой съ прямыми bc и cd; потомъ проведемъ прямыя $p'e$ и $p''a$: въ пересѣченіи послѣднихъ получимъ искомую точку f.

(Доказательство по теоремѣ Паскаля).

Проведемъ прямую черезъ p' и пересѣченіе q прямыхъ bf и ed; замѣтимъ пересѣченіе r прямыхъ $p'q$ и cd; потомъ проведемъ rf; эта прямая есть касательная въ точкѣ f (см. § 340).

2) По даннымъ четыремъ точкамъ: a, b, c, d линіи 2-го порядка и касательной e въ одной изъ нихъ a, найти пятую точку линіи 2-го порядка и провести въ этой точкѣ касательную.

Рѣш. Опредѣлимъ пересѣченіе p данной касательной e съ прямою bc; проведемъ черезъ p произвольную прямую l; опредѣлимъ пересѣченіе p' прямыхъ l и cd и пересѣченіе p'' прямыхъ l и ad; потомъ проведемъ прямыя $p'a$ и $p''b$: въ пересѣченіи этихъ прямыхъ получимъ искомую точку f.

Замѣтимъ q, пересѣченіе $p'a$ съ bc; проведемъ прямую $p''q$; замѣтимъ пересѣченіе r прямыхъ $p''q$ и cd и проведемъ прямую rf; эта прямая есть касательная въ точкѣ f.

1) По даннымъ пяти касательнымъ: a, b, c, d, e линіи 2-го порядка построить шестую касательную къ этой линіи и найти точку касанія.

Рѣш. На прямой p, соединяющей вершины ab и de, возьмемъ произвольную точку l, соединимъ ее прямыми p' и p'' съ точками bc и cd; потомъ найдемъ пересѣченіе $p'e$ и $p''a$; прямая f, соединяющая эти точки, есть искомая касательная.

(Доказательство по теоремѣ Бріаншона).

Найдемъ пересѣченіе прямой p' съ прямою q, соединяющею точки bf и ed, и проведемъ прямую r черезъ точки $p'q$ и cd; потомъ замѣтимъ точку rf, эта точка есть точка касанія прямой f къ линіи 2-го порядка (см. § 341).

2) По даннымъ четыремъ прямымъ: a, b, c, d касательнымъ къ линіи 2-го порядка и точкѣ касанія e одной изъ нихъ a, найти пятую касательную и опредѣлить ея точку касанія.

Рѣш. Соединимъ прямою p данную точку касанія e стороны a съ точкою bc; возьмемъ на p произвольную точку l; соединимъ прямою p' точку l съ cd и прямою p'' точку l съ ad; потомъ опредѣлимъ точки $p'a$ и $p''b$; прямая, соединяющая эти точки, есть искомая касательная f.

Проведемъ прямую q черезъ точки $p'a$ и bc; замѣтимъ точку $p''q$, соединимъ прямою r точки $p''q$ и cd и замѣтимъ пересѣченіе r съ прямою f: это пересѣченіе есть точка касанія касательной f.

3) По даннымъ тремъ точкамъ a, b, c и двумъ касательнымъ d и e въ точкахъ a и b опредѣлить четвертую точку и касательную въ этой точкѣ.

Рѣш. Опредѣлимъ точку p пересѣченія данныхъ касательныхъ d и e; проведемъ черезъ p произвольную прямую l; замѣтимъ p', пересѣченіе l съ bc и p'', пересѣченіе l съ ac; потомъ проведемъ прямыя $p'a$ и $p''b$ и замѣтимъ ихъ пересѣченіе f: эта точка есть искомая.

Замѣтимъ пересѣченіе q прямыхъ $p'a$ и e и пересѣченіе r прямыхъ $p''b$ и d, проведемъ прямую qr; найдемъ пересѣченіе s прямыхъ qr и ab и проведемъ прямую sf: эта прямая есть касательная въ точкѣ f.

3) По даннымъ тремъ касательнымъ a, b, c и точкамъ d и e касанія прямыхъ a и b опредѣлить четвертую касательную и точку ея касанія.

Рѣш. Проведемъ прямую p черезъ данныя точки d и e; возьмемъ на p произвольную точку l; соединимъ прямою p' точки l и bc и прямою p'' точки l и ac; потомъ замѣтимъ точки $p'a$ и $p''b$ и проведемъ черезъ нихъ прямую f; эта прямая есть искомая касательная.

Соединимъ прямою q точки $p'a$ и e и прямою r точки $p''b$ и d; точку qr соединимъ прямою s съ точкою ab и замѣтимъ пересѣченіе s съ f: эта точка пересѣченія sf есть точка касанія на касательной f.

343. Изъ всего сказаннаго ясно, что съ наибольшимъ удобствомъ по методѣ взаимныхъ поляръ трактуются такъ называемыя проективныя свойства коническихъ сѣченій, выражаемыя теоремами о взаимномъ положеніи элементовъ фигуры, независимо отъ длинъ отрѣзковъ фигуры и величинъ угловъ, входящихъ въ фигуры. Теоремы же, выражающія зависимости между длинами отрѣзковъ или величинами угловъ, входящихъ въ фигуры, или же между тѣми и другими, выражаютъ такъ называемыя метрическія свойства фигуръ.

Примѣромъ проективной теоремы можетъ служить теорема Паскаля; къ метрическимъ же относятся, напримѣръ, теоремы Аполлонія.

344. Дадимъ теперь нѣсколько примѣровъ вывода теоремъ характера метрическаго.

За основное коническое сѣченіе примемъ кругъ:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Уравненіе поляры точки x_0, y_0 есть:

$$xx_0 + yy_0 = a^2.$$

Получается прямая линія, перпендикулярная къ прямой, соединяющей начало координатъ съ заданной точкой. Отсюда мы замѣчаемъ такую теорему:

Уголъ, подъ которымъ видны двѣ заданныя точки M_1, M_2 изъ центра основного круга, равенъ углу между полярами P_1, P_2 этихъ точекъ.

345. Докажемъ слѣдующую теорему, что полярою круга относительно основ-

ного заданнаго круга будетъ коническое сѣченіе, имѣющее директрисою поляру центра заданнаго круга, а фокусомъ—центръ основного круга.

Возьмемъ уравненіе основного круга въ видѣ:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Найдемъ теперь уравненіе поляры круга

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Уравненіе касательной къ этому кругу имѣетъ видъ:

$$(x - \alpha)(x_0 - \alpha) + (y - \beta)(y_0 - \beta) = r^2,$$

гдѣ x_0, y_0—координаты точки касанія.

Обозначимъ координаты полюса послѣдней прямой черезъ ξ и η; нужно будетъ сравнить это послѣднее уравненіе съ уравненіемъ поляры

$$x\xi + y\eta = a^2.$$

Получаемъ пропорцію:

$$\frac{x_0 - \alpha}{\xi} = \frac{y_0 - \beta}{\eta} = \frac{r^2 + \alpha(x_0 - \alpha) + \beta(y_0 - \beta)}{a^2}.$$

Изъ послѣдней пропорціи получаемъ

$$\frac{x_0 - \alpha}{\xi} = \frac{y_0 - \beta}{\eta} = \frac{r^2}{a^2 - \alpha\xi - \beta\eta};$$

опредѣляя отсюда $x_0 - \alpha$ и $y_0 - \beta$ и подставляя въ уравненіе круга: $(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 = r^2$, получимъ

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{r^2}(a^2 - \alpha\xi - \beta\eta)^2.$$

Послѣднее уравненіе, на основаніи соображеній § 298, показываетъ, что взаимная кривая для круга есть коническое сѣченіе, имѣющее фокусомъ центръ основного круга, принятый нами за начало координатъ, а директрисой—прямую:

$$\alpha\xi + \beta\eta = a^2,$$

т. е. поляру центра заданнаго круга:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = b^2.$$

Только что доказанная теорема можетъ быть приложена къ выводу ряда коррелятивныхъ свойствъ коническихъ сѣченій.

Двѣ касательныя къ кругу составляютъ съ ихъ хордою прикосновенія равные углы.	Линія, соединяющая фокусъ съ точкою пересѣченія двухъ касательныхъ, дѣлитъ пополамъ уголъ между радіусами векторами точекъ прикосновенія.

Касательная къ кругу перпендикулярна къ линіи, соединяющей центръ съ точкою касанія.

Точка на коническомъ сѣченіи и точка, въ которой касательная черезъ нее пересѣкаетъ директрису, стягиваетъ прямой уголъ въ фокусѣ.

Какая нибудь прямая перпендикулярна къ прямой, соединяющей ея полюсъ съ центромъ круга.

Какая нибудь точка и пересѣченіе ея поляры съ директрисой стягиваетъ прямой уголъ въ фокусѣ.

Мѣсто пересѣченія касательныхъ къ кругу, составляющихъ данный уголъ, есть концентрическій кругъ.

Мѣсто пересѣченія касательныхъ, коихъ хорда прикосновенія стягиваетъ данный уголъ въ фокусѣ, есть коническое сѣченіе, имѣющее тотъ же фокусъ и туже директрису.

346. Взаимныя поляры относительно круга даютъ возможность выводить теоремы метрическаго характера также относительно длинъ отрѣзковъ, что основывается на теоремѣ:

Произведеніе разстояній центра основного круга, называемаго началомъ, до точки M и до ея поляры P есть величина постоянная, равная квадрату радіуса.

Изъ этой теоремы легко вывести разнообразныя коррелативныя теоремы:

Сумма или разность перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ начала на пару параллельныхъ касательныхъ къ кругу, постоянно равна діаметру круга.

Сумма обратныхъ величинъ отрѣзковъ фокусной хорды есть величина постоянная.

Прямоугольникъ изъ отрѣзковъ какой нибудь хорды въ кругѣ, проведенной черезъ начало, есть величина постоянная.

Прямоугольникъ изъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокуса на двѣ параллельныя касательныя есть величина постоянная.

Проективныя свойства коническихъ сѣченій.

347. Мы видѣли уже, что само названіе коническихъ сѣченій получаютъ линіи второго порядка вслѣдствіе того, что онѣ являются въ сѣченіи плоскости нѣкоторымъ прямымъ круговымъ конусомъ; такъ что линіи второго порядка можно разсматривать, какъ перспективу круга на плоскости. Въ этомъ случаѣ глазъ наблюдателя помѣщается въ точку S (см. черт. 94, 95, 96); плоскость P есть плоскость перспективы, а разсматриваемый конусъ есть такъ называемый проектирующій конусъ заданнаго круга, служащаго этому конусу основаніемъ.

Если точка глаза S уходитъ въ безконечность, то конусъ обращается въ цилиндръ, коническое сѣченіе въ плоскости P, служащее перспективою круга ab

(см. чертежи 95, 96), обращается въ коническое сѣченіе, которое называется проекціею круга на плоскости P. Проектирующій конусъ обращается въ прямой круговой цилиндръ и коническое сѣченіе будетъ эллипсомъ, лежащимъ въ плоскости P, пересѣкающей этотъ круговой цилиндръ.

348. Возьмемъ нѣкоторую кривую линію S въ пространствѣ. Черезъ каждую изъ ея точекъ проведемъ прямую, параллельную нѣкоторому данному направленію. Совокупность этихъ прямыхъ представитъ нѣкоторую цилиндрическую поверхность, проходящую черезъ заданную кривую S. Пересѣчемъ затѣмъ полученную цилиндрическую поверхность нѣкоторою плоскостью P; тогда въ этой послѣдней плоскости, въ сѣченіи, образуется нѣкоторая кривая линія Σ, называемая *проекціею* кривой S на плоскости P. Разсматриваемый цилиндръ называется *проектирующимъ цилиндромъ*, а плоскость P называется *плоскостью проекцій*.

Если плоскость проекцій перпендикулярна къ направленію образующихъ проектирующаго цилиндра, т. е. перпендикулярна къ такъ называемому *направленію проектированія*, то проекція называется *прямоугольною*. Въ остальныхъ же случаяхъ проекція называется *косоугольною*.

349. Указанный способъ проектированія кривыхъ на плоскость есть частный случай болѣе общаго способа проектированія, называемаго *перспективою*. Возьмемъ кривую S и каждую изъ ея точекъ соединимъ съ нѣкоторою точкою M, называемою *точкою глаза* (Point d'oeil). Всѣ такія прямыя образуютъ конусъ, имѣющій вершину въ точкѣ M и проходящій черезъ точки кривой S. Если полученный конусъ мы пересѣчемъ нѣкоторою плоскостью P, то въ сѣченіи получимъ кривую Σ, называемую *перспективою* кривой S. Разсматриваемый конусъ называется *проектирующимъ конусомъ*.

350. Всякую линію второго порядка (исключая случай двухъ прямыхъ) можно помѣстить на круговой конусъ, т. е. разсматривать, какъ пересѣченіе этого конуса нѣкоторою плоскостью.

Это замѣчаніе есть теорема обратная той, которую мы доказывали въ §§ 231, 232, 233. Тамъ мы доказывали, что въ сѣченіи кругового конуса какою нибудь плоскостью получается кривая второго порядка. Теперь же надо доказать, что всякая кривая второго порядка можетъ быть такъ получена.

Разсматривая внимательно черт. 95 и 94 мы замѣчаемъ, что для того, чтобы получить эллипсъ или гиперболу съ даннымъ эксцентриситетомъ, нужно пересѣчь конусъ плоскостью подъ извѣстнымъ, опредѣленнымъ вполнѣ для каждаго эксцентриситета, угломъ, ибо разстояніе между фокусами FF_1 равняется разстоянію OO_1 центровъ вписанныхъ шаровъ, умноженному на $\cos$ остраго угла, образованнаго осью конуса съ сѣкущею плоскостью.

Если мы будемъ передвигать сѣкущую плоскость параллельно самой себѣ, то эксцентриситетъ сѣченія не будетъ мѣняться, ибо всегда разстояніе центровъ шаровъ OO_1 будетъ измѣняться пропорціонально большой оси AA_1.

Чтобы опредѣлить при заданномъ эксцентриситетѣ вполнѣ коническое сѣченіе необходимо указать еще большую ось. Остается, слѣдовательно, рѣшить задачу уже вполнѣ элементарную: провести сѣкущую плоскость на такомъ разстояніи отъ вершины конуса, чтобы величина большой оси AA_1 получаемаго сѣченія вышла заданной длины.

Что касается параболы, то параметръ ея зависитъ отъ разстоянія вершины ея A до вершины конуса S (см. черт. 96).

351. Итакъ мы видимъ, что двѣ выбранныя произвольно кривыя второго порядка могутъ быть помѣщены на одномъ и томъ же прямомъ круговомъ конусѣ и, слѣдовательно, каждая изъ нихъ можетъ быть разсматриваема, какъ перспектива другой.

Проективными свойствами коническихъ сѣченій будутъ называться свойства, общія всѣмъ коническимъ сѣченіямъ, выводимымъ изъ какого нибудь одного, напримѣръ, круга, проектированіемъ при помощи перспективы. Къ такимъ теоремамъ принадлежатъ, напримѣръ, теоремы Паскаля и Бріаншона, которыя можно бы было доказать предварительно для круга, а затѣмъ ясно, что онѣ распространяются и на всякое другое коническое сѣченіе, какъ перспективу круга, ибо въ перспективѣ всякая вершина шестиугольника, вписаннаго въ кругъ, даетъ вершину новаго шестиугольника, представляющаго перспективу перваго и вписаннаго въ коническое сѣченіе—перспективу круга. Каждая касательная къ кругу въ теоремѣ Бріаншона обращается въ касательную въ соотвѣтствующей точкѣ перспективнаго коническаго сѣченія.

Если три прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ M, то и три перспективныя прямыя пересѣкутся въ точкѣ M_1, представляющей перспективу точки M. Изъ всего сказаннаго явствуетъ, что разъ теоремы Паскаля и Бріаншона доказаны для круга, или, все равно, для какого нибудь опредѣленнаго коническаго сѣченія, они будутъ справедливы и въ перспективѣ, дающей всякое другое коническое сѣченіе.

352. Способность сохраняться при проектированіи при помощи перспективы отличаетъ проективныя свойства коническихъ сѣченій отъ ихъ такъ называемыхъ метрическихъ свойствъ.

Возьмемъ въ пространствѣ двѣ плоскости, все равно, параллельныя или пересѣкающіяся, и гдѣ нибудь внѣ ихъ точку S. Пусть одна изъ плоскостей будетъ плоскостью заданной фигуры, образованной при помощи или конечнаго числа точекъ или безчисленнаго множества такихъ точекъ, образующихъ цѣлыя линіи. При помощи точки S, какъ точки глаза, для заданной фигуры найдемъ перспективу на другой плоскости. Тогда каждой точкѣ заданной фигуры будетъ соотвѣтствовать вполнѣ опредѣленная точка перспективы и наоборотъ, каждой точкѣ перспективы будетъ соотвѣтствовать вполнѣ опредѣленная точка заданной фигуры. Точно также каждой прямой одной фигуры будетъ соотвѣтствовать вполнѣ опредѣленная прямая другой.

353. Указанное соотвѣтствіе между точками двухъ перспективныхъ фигуръ есть частный случай болѣе общей такъ называемой *гомографической зависимости* между точками двухъ плоскостей (Figures projectives ou homografiques. Collineare Verwandschaft).

354. Назовемъ черезъ x, y координаты точки, лежащей на одной плоскости, а X, Y координаты нѣкоторой точки на другой плоскости; тогда, если бы мы захотѣли, чтобы каждой точкѣ одной плоскости соотвѣтствовала вполнѣ опредѣленная точка другой, и обратно, то необходимо координаты X, Y считать нѣкоторыми однозначными функціями отъ координатъ x, y и обратно, координаты x, y должны однозначно выражаться черезъ X, Y.

Двѣ плоскости мы будемъ называть *гомографическими*, если каждой прямой одной изъ нихъ будетъ соотвѣтствовать прямая, составленная изъ соотвѣтственныхъ точекъ.

Аналитически вопросъ указанія гомографической зависимости двухъ плоскостей приводится къ слѣдующей задачѣ:

Найти двѣ функціи X, Y независимыхъ перемѣнныхъ, независимыя другъ отъ друга подъ тѣмъ условіемъ, чтобы всякому линейному уравненію $lx + my + n = 0$ между x, y соотвѣтствовало линейное же уравненіе $LX + MY + N = 0$*).

Рѣшеніемъ послѣдней задачи оказываются слѣдующія формулы, выражающія гомографическую зависимость между двумя плоскостями:

$$X = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\,, \quad Y = \frac{Ax + By + C}{\alpha x + \beta y + \gamma}\,, \qquad (*)$$

гдѣ коэффиціенты совершенно произвольны.

Одинъ изъ коэффиціентовъ, напримѣръ γ, можно положить равнымъ единицѣ, ибо на него можно раздѣлить всѣ коэффиценты. Получается такимъ образомъ восемь произвольныхъ коэффиціентовъ, заданіемъ которыхъ указывается гомографическая зависимость двухъ плоскостей.

Отсюда мы замѣчаемъ, что для заданія гомографіи достаточно указать четыре пары соотвѣтственныхъ точекъ. Можно указать четыре совершенно произвольныя точки на одной плоскости и заставить имъ соотвѣтствовать четыре произвольныя точки другой плоскости. Получимъ восемь уравненій, достаточныхъ для опредѣленія восьми коэффиціентовъ.

355. Относительно двухъ гомографическихъ плоскостей можно доказать такую общую теорему:

Всякія двѣ гомографическія плоскости перемѣщеніемъ въ пространствѣ могутъ быть приведены въ перспективное положеніе, причемъ каждая точка одной плоскости будетъ перспективою соотвѣтственной точки другой.

---

*) Эта задача рѣшена академикомъ А. Марковымъ въ статьѣ: «Къ вопросу о черченіи картъ». С.-Петербургъ. 1888 г., а также: *Chatenet*. Nouvelles Annales, 1886.

356. Прежде чѣмъ разсматривать общую высказанную нами теорему, докажемъ, что двѣ гомографическія плоскости наложеніемъ одна на другую могутъ быть приведены въ такъ называемое *гомологическое положеніе* (Figures homologiques. Collineare Lage).

357. Гомологическая зависимость двухъ плоскостей выражается уравненіями

$$\Xi = \frac{\xi}{p\xi + q\eta + r}, \quad \Upsilon = \frac{\eta}{p\xi + q\eta + r}, \tag{*}$$

гдѣ ξ и η суть координаты нѣкоторой точки относительно нѣкоторой прямоугольной системы координатъ, а Ξ и Υ координаты точки, принадлежащей другой плоскости, совмѣщенной съ плоскостью $\xi\eta$, причемъ онѣ взяты относительно той же системы координатъ, что и ξ, η.

358. Точки съ координатами (Ξ, Υ) и (ξ, η) въ двухъ гомологическихъ системахъ будемъ называть *соотвѣтственными*.

Покажемъ, что всякая пара соотвѣтственныхъ точекъ лежитъ на прямой проходящей черезъ начало координатъ. Въ самомъ дѣлѣ, изъ условій (*), выражающихъ гомологическую зависимость, можетъ быть выведено уравненіе, доказывающее справедливость сказаннаго:

$$\frac{\Upsilon}{\Xi} = \frac{\eta}{\xi}.$$

Начало координатъ является точкой, въ которой сходятся прямыя, соединяющія соотвѣтственные элементы двухъ гомологическихъ фигуръ, а потому начало координатъ называется *центромъ гомологіи*.

359. Гомологическія фигуры обращаются въ гомотетическія при $p = q = 0$ и начало координатъ въ этомъ случаѣ называется *центромъ подобія* (см. § 276).

360. *Осью гомологіи* называется геометрическое мѣсто точекъ, совпадающихъ съ имъ соотвѣтственными, а потому мы получимъ ея уравненіе, если положимъ $\Xi = \xi$, $\Upsilon = \eta$ въ уравненіяхъ (*). Искомое уравненіе оси гомологіи будетъ:

$$p\xi + q\eta + r - 1 = 0.$$

Оказывается, что ось гомологіи параллельна прямой $p\xi + q\eta + r = 0$, для которой соотвѣтственная прямая другой системы лежитъ на безконечности.

361. Каждой прямой одной изъ двухъ гомологическихъ системъ соотвѣтствуетъ опредѣленная прямая другой. Покажемъ, что каждая пара соотвѣтственныхъ прямыхъ встрѣчается въ точкѣ, лежащей на оси гомологіи.

Возьмемъ уравненіе какой нибудь прямой

$$a\xi + b\eta + c = 0. \tag{1}$$

Уравненіе соотвѣтственной прямой будетъ

$$a\Xi + b\Upsilon + c = 0. \tag{2}$$

Уравненіе (2) можетъ быть, на основаніи условій гомологіи (*), переписано въ видѣ:

$$a\xi + b\eta + c(p\xi + q\eta + r) = 0. \qquad (2')$$

Вычитая изъ уравненія (2′) уравненіе (1), получимъ:

$$c(p\xi + q\eta + r - 1) = 0.$$

362. Гомотетическія фигуры суть частные случаи фигуръ гомологическихъ, коихъ ось гомологіи лежитъ на безконечности, ибо въ этомъ случаѣ $p = q = 0$. (Подобіе. Aenlichkeit).

363. Покажемъ теперь, что всякія двѣ гомографическія плоскости могутъ быть, передвиженіемъ другъ по другу, приведены въ гомологическое положеніе. Для этой цѣли преобразуемъ координатныя системы въ одной и другой плоскости, перенеся въ одной изъ нихъ начало координатъ въ точку (λ, μ), а въ другой въ точку (l, m) и кромѣ того, во второй плоскости повернемъ систему на нѣкоторый уголъ θ. Тогда формулы, выражающія гомографическую зависимость,

$$X = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \quad Y = \frac{Ax + By + C}{\alpha x + \beta y + \gamma},$$

преобразуются по формуламъ:

$$X = \lambda + \Xi, \quad Y = \mu + \Upsilon,$$

$$x = l + \xi \cos\theta - \eta \sin\theta, \quad y = m + \xi \sin\theta + \eta \cos\theta.$$

Подставляя, получимъ:

$$\Xi = \frac{\Pi\xi + \mathrm{K}\eta + \mathrm{P}}{p\xi + q\eta + r}, \quad \Upsilon = \frac{P\xi + Q\eta + R}{p\xi + q\eta + r},$$

гдѣ $\Pi = (a - \lambda\alpha)\cos\theta + (b - \lambda\beta)\sin\theta;$

$$\mathrm{K} = -(a - \lambda\alpha)\sin\theta + (b - \lambda\beta)\cos\theta;$$

$$\mathrm{P} = (a - \lambda\alpha)\,l + (b - \lambda\beta)\,m + c - \lambda\gamma.$$

$$P = (A - \mu\alpha)\cos\theta + (B - \mu\beta)\sin\theta;$$

$$Q = -(A - \mu\alpha)\sin\theta + (B - \mu\beta)\cos\theta;$$

$$R = (A - \mu\alpha)\,l + (B - \mu\beta)\,m + C - \mu\gamma.$$

Чтобы получалась гомологія, необходимо положить $\Pi = Q$, $\mathrm{K} = 0$, $\mathrm{P} = 0$, $P = 0$, $R = 0$, что даетъ пять уравненій для опредѣленія пяти величинъ; $\lambda, \mu, l, m, \theta$.

Сказанныя уравненія могутъ быть представлены въ такомъ видѣ:

$$tg\,\theta = \frac{b - \lambda\beta}{a - \lambda\alpha} = -\frac{A - \mu\alpha}{B - \mu\beta} = \frac{B - \mu\beta - (a - \lambda\alpha)}{b - \lambda\beta + (A - \mu\alpha)} = k.$$

Отсюда получаемъ:

$$b - \lambda\beta = k(a - \lambda\alpha); \quad \lambda = \frac{b - ka}{\beta - k\alpha}. \tag{1}$$

$$-A + \mu\alpha = k(B - \mu\beta); \quad \mu = \frac{A + kB}{\alpha + k\beta}. \tag{2}$$

Кромѣ того имѣемъ:

$$B - \mu\beta - (a - \lambda\alpha) = k(b - \lambda\beta) + k(A - \mu\alpha),$$

но принимая во вниманіе (1) и (2), получимъ:

$$B - \mu\beta - (a - \lambda\alpha) = k^2(a - \lambda\alpha) - k^2(B - \mu\beta),$$

$$(1 + k^2)(B - \mu\beta) - (1 + k^2)(a - \lambda\alpha) = 0,$$

но $1 + k^2$ не равно нулю, слѣдовательно,

$$B - \mu\beta - a + \lambda\alpha = 0.$$

Подставляя, получимъ:

$$B - \beta\frac{A + kB}{\alpha + k\beta} - a + \alpha\frac{b - ka}{\beta - k\alpha} = 0,$$

откуда

$$k = \frac{(B\alpha - A\beta)\beta + (\alpha b - \beta a)\alpha}{\alpha(B\alpha - A\beta) - \beta(\alpha b - \beta a)}.$$

Подставляя полученную величину k въ (1) и (2), получимъ для λ и μ выраженія

$$\lambda = \frac{A\beta - B\alpha + b\beta + a\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \mu = \frac{A\alpha + B\beta + \alpha b - \beta a}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

По этимъ выраженіямъ можно опредѣлить l и m при помощи уравненія $P = 0$ и $R = 0$, если только эти послѣднія можно рѣшить относительно l и m. Въ этомъ случаѣ не должно обращаться въ нуль выраженіе:

$$(a - \lambda\alpha)(B - \mu\beta) - (b - \lambda\beta)(A - \mu\alpha),$$

которое можетъ быть написано въ такомъ видѣ:

$$\frac{\alpha^2(b^2 + B^2) - 2\alpha\beta(ab + AB) + \beta^2(a^2 + A^2)}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Числитель послѣдняго выраженія можетъ быть представленъ въ такомъ видѣ:

$$\frac{[\alpha(b^2 + B^2) - \beta(ab + AB)]^2 + (aB - bA)^2\beta^2}{b^2 + B^2}.$$

Послѣднее выраженіе всегда положительное и можетъ обратиться въ нуль, если $aB - bA = 0$, $\alpha b - \beta a = 0$. Этотъ случай отбрасываемъ, какъ недающій гомографической зависимости.

Уголъ θ опредѣляется изъ уравненія: $tg\theta = k$.

Кромѣ указаннаго исключительнаго случая придется исключить также случай $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

364. При $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ гомографическая зависимость выражается уравненіями:

$$X = ax + by + c, \qquad Y = Ax + By + C.$$

Если мы въ обѣихъ гомографическихъ системахъ сдѣлаемъ преобразованіе координатъ, то условія гомографической зависимости останутся тѣ же самыя, только коэффиціенты будутъ другіе.

Если коэффиціенты удовлетворяютъ условіямъ:

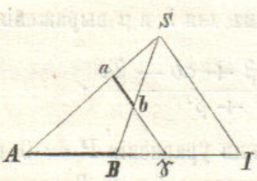
$$\frac{a-1}{A} = \frac{b}{B-1} = \frac{c}{C},$$

то гомографія обращается въ частный случай гомологіи (Affinität), когда центръ ея лежитъ на безконечности, а ось имѣетъ уравненіе:

$$(a-1)\,x + by + c = 0.$$

Въ этомъ случаѣ прямыя, соединяющія соотвѣтственныя точки плоскости, параллельны между собою.

Итакъ мы видимъ, что справедливо высказанное въ § 356 замѣчаніе о возможности приведенія двухъ гомографическихъ плоскостей въ гомологическое положеніе наложеніемъ одной плоскости на другую.



Черт. 134.

365. Покажемъ теперь, что двѣ гомологическія фигуры поворотомъ плоскости одной изъ нихъ на нѣкоторый произвольный уголъ около оси гомологіи могутъ быть приведены въ перспективное положеніе. Докажемъ предварительно такую лемму:

Лемма. Если взять на одной прямой двѣ точки A, B, на другой двѣ точки a, b (см. черт. 134), провести прямыя Aa, Bb, пересѣкающіяся въ точкѣ S, и вращать вторую прямую ab около ея точки пересѣченія γ съ первой AB, то точка S мѣняетъ свое положеніе и тогда:

1) прямая, проведенная черезъ точку S параллельно прямой ab, встрѣчаетъ во всякомъ своемъ положеніи прямую AB въ одной и той же точкѣ I;

2) точка S описываетъ кругъ, центръ котораго есть точка I.

Въ самомъ дѣлѣ, не смотря на то, что линія ab вращается около точки γ, разстоянія a, b отъ γ не мѣняются и точку S можно разсматривать въ каждомъ ея положеніи какъ вершину пучка, которымъ прямыя AB, ab дѣлятся гомографически, причемъ A соотвѣтствуетъ a, B—b и γ самой себѣ. Мы видѣли уже въ § 66, что заданіе трехъ паръ соотвѣтственныхъ элементовъ опредѣляетъ гомографическую зависимость двухъ рядовъ точекъ вполнѣ; отсюда ясно, что точка I, какъ соотвѣтствующая безконечно далекой точкѣ прямой ab, должна занимать на прямой AB вполнѣ опредѣленное положеніе по отношенію къ точкамъ A, B, γ и, слѣдовательно, она не должна мѣнять своего положенія при вращеніи прямой ab.

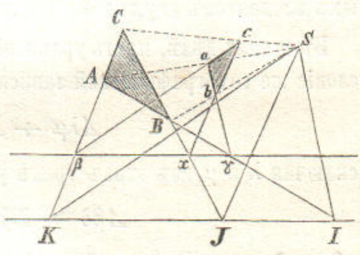
Что же касается второй части леммы, то изъ подобныхъ треугольниковъ имѣемъ:

$$SI = \frac{BI.\ b\gamma}{B\gamma}.$$

Это значеніе SI постоянное, слѣдовательно, точка S описываетъ кругъ, имѣющій центромъ точку I.

366. Доказанную лемму можно обобщить, разсматривая случай, когда прямая ab, вращаясь вокругъ точки γ, проходитъ въ разныхъ плоскостяхъ. Фигура, разсматриваемая въ предыдущемъ параграфѣ можетъ быть построена въ каждой изъ этихъ плоскостей, а потому SI сохранитъ постоянно свою величину и точка S опишетъ шаръ, имѣющій центромъ точку I.

367. Если повернуть плоскость одного изъ двухъ гомологическихъ треугольниковъ около оси гомологіи, то прямыя, соединяющія попарно ихъ соотвѣтственныя вершины, пересѣкаются въ одной точкѣ и эта точка, мѣняя свое положеніе, описываетъ кругъ, плоскость котораго перпендикулярна къ оси гомологіи (см. черт. 135).



Черт. 135.

Въ самомъ дѣлѣ, при вращеніи треугольника acb около прямой $\alpha\beta$ прямыя AB, ab, пересѣкающіяся въ γ, находятся въ одной плоскости и слѣдовательно прямыя Aa, Bb пересѣкаются, ибо онѣ лежатъ въ этой плоскости. Равнымъ образомъ прямая Aa встрѣчаетъ прямую Cc, а Cc прямую Bb. Эти три прямыя не лежатъ въ одной плоскости, слѣдовательно онѣ пересѣкаются въ одной точкѣ S.

Проведемъ черезъ эту точку прямыя, параллельныя тремъ сторонамъ треугольника abc; эти прямыя, находящіяся въ плоскости, параллельной плоскости треугольника, встрѣтятъ стороны другого треугольника ABC, неподвижнаго, въ точкахъ I, J, K, лежащихъ на прямой, параллельной оси гомологіи $\alpha\beta\gamma$, ибо эта ось есть линія пересѣченія плоскости треугольника ABC съ плоскостью треугольника abc, параллельной плоскости, проходящей черезъ точку S. На основаніи доказанной леммы эти три точки останутся неподвижными и будутъ центрами трехъ шаровъ, по которымъ будетъ двигаться точка S. Слѣдовательно эта точка опишетъ кругъ — общую линію пересѣченія этихъ трехъ шаровъ; кромѣ того, такъ какъ ихъ центры лежатъ на прямой IJK, то на этой же прямой будетъ находиться центръ этого круга, плоскость котораго будетъ перпендикулярна къ IJK, равно какъ и къ параллельной ей $\alpha\beta\gamma$.

Если три прямыя Aa, Bb, Cc пересѣкаются при всякомъ положенiи въ одной точкѣ S пространства, то оба треугольника всегда представляютъ перспективу одинъ другою, причемъ точка S есть точка глаза.

Итакъ мы видимъ, что двѣ гомографическiя плоскости могутъ быть на безчисленное множество манеровъ приведены въ такъ называемое перспективное положенiе.

368. Представимъ себѣ, что у насъ двѣ гомографическiя плоскости наложены одна на другую какъ нибудь (не въ гомологическомъ положенiи). Тогда каждому прямолинейному ряду точекъ одной плоскости соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленный прямолинейный рядъ точекъ другой плоскости, а также каждому пучку лучей первой плоскости, имѣющему центромъ нѣкоторую точку первой плоскости, будетъ соотвѣтствовать опредѣленный пучекъ другой плоскости. Такiе ряды точекъ и пучки будемъ называть *соотвѣтственными*.

Легко убѣдиться, что соотвѣтственные ряды точекъ и пучки двухъ гомографическихъ плоскостей находятся въ гомографической зависимости въ томъ смыслѣ, какъ мы это опредѣляли въ § 66.

369. Покажемъ теперь, что геометрическое мѣсто точекъ встрѣчи соотвѣтственныхъ элементовъ двухъ гомографическихъ пучковъ есть коническое сѣченiе.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть уравненiя двухъ пучковъ будутъ: $\beta-\lambda\alpha=0$, $\delta-\mu\gamma=0$; условiе же гомографической зависимости пусть будетъ:

$$A\lambda\mu+B\lambda+C\mu+D=0.$$

Исключая λ и μ изъ этихъ трехъ уравненiй, получимъ уравненiе:

$$A\beta\delta+B\beta\gamma+C\delta\alpha+D\alpha\gamma=0. \tag{1}$$

α, β, γ, δ суть линейныя функцiи x и y, а потому послѣднее уравненiе (1) опредѣляетъ нѣкоторое коническое сѣченiе, которое и есть искомое геометрическое мѣсто точекъ встрѣчи соотвѣтственныхъ элементовъ.

Уравненiе (1) показываетъ, что коническое сѣченiе, имъ опредѣляемое, проходитъ черезъ точки ($\alpha=0$, $\beta=0$), ($\gamma=0$, $\delta=0$), т. е. черезъ центры заданныхъ пучковъ.

370. Легко убѣдиться въ справедливости теоремы коррелативной:

Коническое сѣченiе можно разсматривать какъ обертку прямыхъ линiй, соединяющихъ соотвѣтственные элементы двухъ гомографическихъ рядовъ точекъ.

371. Прежде чѣмъ доказать эту теорему, надо замѣтить, какимъ образомъ по уравненiю кривой въ касательныхъ координатахъ написать уравненiе этой кривой въ декартовыхъ.

Кривая линiя, опредѣляемая уравненiемъ: $f(a, b)=0$, касается прямыхъ: $y=ax+b$, линейныя координаты которыхъ a и b удовлетворяютъ этому уравненiю и, слѣдовательно, какъ мы видѣли, кривая есть такъ называемая *обертка* или *огибающая* прямыхъ: $y=ax+b$.

Общій способъ нахожденія огибающихъ излагается въ дифференціальномъ исчисленіи, здѣсь же мы ограничимся случаемъ уравненій второго порядка, который можетъ быть трактованъ элементарно.

Возьмемъ уравненіе коническаго сѣченія въ трилинейныхъ координатахъ α, β, γ въ такомъ видѣ: $\alpha\gamma - \beta^2 = 0$. Точку, лежащую на этомъ коническомъ сѣченіи, можно опредѣлять частнымъ значеніемъ нѣкотораго независимаго перемѣннаго μ. Въ самомъ дѣлѣ, трилинейныя координаты: $\alpha = \mu$, $\beta = 1$, $\gamma = \frac{1}{\mu}$ удовлетворяютъ заданному уравненію коническаго сѣченія. Двѣ прямыя $\alpha = \mu\beta$ и $\gamma = \frac{1}{\mu}\beta$ встрѣчаются, слѣдовательно, на коническомъ сѣченіи. Возьмемъ двѣ точки: μ_0 и μ_1; составимъ уравненіе прямой линіи, проходящей черезъ эти двѣ точки. Пусть уравненіе искомой прямой въ трилинейныхъ координатахъ будетъ:

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0;$$

выражая условія того, что эта прямая проходитъ черезъ точки μ_0, μ_1, получимъ:

$$l\mu_0 + m + \frac{n}{\mu_0} = 0, \qquad l\mu_1 + m + \frac{n}{\mu_1} = 0.$$

Отсюда:

$$\frac{l}{1} = \frac{m}{-(\mu_0 + \mu_1)} = \frac{n}{\mu_0 \mu_1}.$$

Уравненіе хорды, слѣдовательно, будетъ:

$$\alpha - (\mu_0 + \mu_1)\beta + \mu_0\mu_1\gamma = 0.$$

Сближая точки, т. е. полагая: $\mu_0 = \mu_1 = \mu$, получимъ касательную:

$$\alpha - 2\mu\beta + \mu^2\gamma = 0,$$

соотвѣтствующую точкѣ μ.

Итакъ мы видимъ, что обертка прямыхъ, опредѣляемыхъ уравненіемъ:

$$\alpha - 2\mu\beta + \mu^2\gamma = 0,$$

есть коническое сѣченіе: $\alpha\gamma - \beta^2 = 0$.

Покажемъ, что линія, выраженная уравненіемъ:

$$L - 2\mu M + \mu^2 N = 0,$$

всегда касается кривой: $LN - M^2 = 0$, даже въ томъ случаѣ, когда L, M, N не суть линейныя функціи x, y. Уравненіе: $L - (\mu_0 + \mu_1) M + \mu_0\mu_1 N = 0$, удовлетворяясь координатами точекъ: $(L - M\mu_0 = 0,\ \ M\mu_0 - N = 0)$, $(L - M\mu_1 = 0, M\mu_1 - N = 0)$, будетъ уравненіемъ кривой, проходящей черезъ точки, въ которыхъ кривыя: $L - M\mu_0 = 0$, $L - M\mu_1 = 0$ пересѣкаютъ кривую $LN - M^2 = 0$.

Если $\mu_0 = \mu_1 = \mu$, то очевидно, что кривая

$$L - 2\mu M + \mu^2 N = 0$$

касается кривой $LN - M^2 = 0$ въ точкахъ, въ которыхъ $L - \mu M = 0$ ее пересѣкаетъ.

372. Обращаемся теперь къ доказательству теоремы, высказанной въ § 370. На основаніи закона двойственности мы замѣчаемъ, что для вывода уравненія искомой обертки въ линейныхъ координатахъ необходимо произвести разсужденія аналогичныя тѣмъ, которыя приведены въ § 369 и сдѣлать выкладки буквально тождественныя. Въ результатѣ получится уравненіе между линейными координатами касательной къ искомой оберткѣ. Это уравненіе будетъ второй степени, вида:

$$Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F = 0,$$

гдѣ a и b суть коэффиціенты уравненія прямой: $y = ax + b$.

373. Исключая b, получаемъ уравненіе:

$$a^2(A - 2Bx + Cx^2) + 2a(D - Ex + By - Cyx) + Cy^2 + 2Ey + F = 0.$$

Искомая обертка, согласно § 371, имѣетъ уравненіе:

$$(A - 2Bx + Cx^2)(Cy^2 + 2Ey + F) - (D - Ex + By - Cxy)^2 = 0.$$

Раскрывая въ этомъ уравненіи скобки, мы замѣчаемъ, что члены третьей и четвертой степени пропадаютъ и остается уравненіе второй степени, что мы уже видѣли въ § 328. Итакъ мы видимъ, что, дѣйствительно, коническое сѣченіе есть обертка прямыхъ, соединяющихъ соотвѣтственные элементы двухъ гомографическихъ рядовъ точекъ, что и требовалось доказать.

Легко показать, что два заданныхъ гомографическихъ прямолинейныхъ ряда точекъ касаются полученнаго огибающаго коническаго сѣченія.

374. Изъ доказанныхъ только что общихъ теоремъ слѣдуютъ, какъ непосредственныя, слѣдствія извѣстные способы образованія коническихъ сѣченій: Ньютона и Маклорена (Брэкенриджа).

375. *Теорема Ньютона.* Два угла постоянной величины вращаются около вершинъ A и B (см. черт. 136), причемъ точка пересѣченія ихъ двухъ сторонъ остается постоянно на прямой $m_1 m_2 m_3$. Мѣсто точки пересѣченія ихъ другихъ сторонъ будетъ коническое сѣченіе, проходящее черезъ точки A и B.

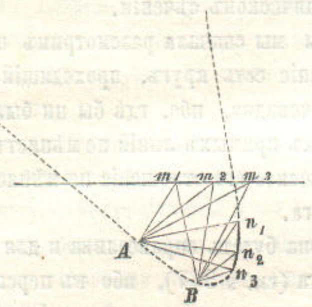
Пучки A и B, соотвѣтственные элементы которыхъ встрѣчаются на прямой, суть гомографическіе (см. § 72); отсюда также пучки (A, n_1, n_2, n_3) и (B, n_1, n_2, n_3) суть гомографическіе, а потому геометрическое мѣсто точекъ ихъ пересѣченія есть коническое сѣченіе.

376. *Теорема Маклорена.* Даны три точки и двѣ прямыя; если двигать по двумъ прямымъ двѣ вершины измѣняющаго свою форму треугольника, три сто-

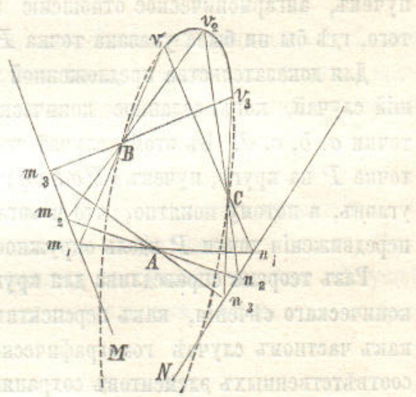
роны котораго проходятъ черезъ три данныя точки, то третья вершина опишетъ коническое сѣченіе.

Пусть заданныя точки будутъ A, B, C, а заданныя прямыя M и N. Различныя положенія стороны треугольника, проходящей черезъ точку A, составляютъ пучекъ, образующій на прямыхъ M и N два гомографическихъ ряда (m_1, m_2, m_3), (n_1, n_2, n_3) (см. черт. 137). Пучки (B, m_1, m_2, m_3) и (C, n_1, n_2, n_3) гомографическіе, слѣдовательно ихъ соотвѣтственные элементы пересѣкаются въ точкахъ r_1, r_2, r_3, лежащихъ на коническомъ сѣченіи, проходящемъ черезъ точки B и C.

377. Шаль *) обобщилъ методы образованія коническихъ сѣченій Ньютона и Маклорена тѣмъ, что въ теоремѣ Ньютона можно прямую линію $m_1\ m_2\ m_3$ замѣ-



Черт. 136.



Черт. 137.

нить коническимъ сѣченіемъ, проходящимъ черезъ точки A и B, а въ теоремѣ Маклорена одну изъ сторонъ треугольника заставить касаться нѣкотораго коническаго сѣченія, касающагося двухъ неподвижныхъ прямыхъ M и N. Кромѣ того Шаль обобщилъ способъ Маклорена слѣдующимъ образомъ. Если стороны n-угольника вращаются около неподвижныхъ точекъ, а всѣ вершины кромѣ одной скользятъ по даннымъ неподвижнымъ прямымъ, то послѣдняя вершина опишетъ коническое сѣченіе, проходящее черезъ двѣ неподвижныя точки, около которыхъ вращаются стороны, прилежащіе къ этой вершинѣ.

Въ этой теоремѣ Шаля имѣется n пучковъ, расположенныхъ около неподвижныхъ точекъ, около которыхъ вращаются стороны n—угольника. Неподвижныя же прямыя, по которымъ скользятъ вершины, передаютъ гомографичность отъ пучка къ пучку.

378. Изъ приведенныхъ теоремъ могутъ быть, на основаніи закона двойствен-

*) См. *Chasles*. Traité des sections coniques.

ности, выведены теоремы коррелативныя. Укажемъ еще на одну теорему, приводимую Шалемъ въ его Traité des sections coniques.

Если провести между двумя данными неподвижными прямыми хорды, которыя были бы видимы изъ неподвижной точки подъ равными углами при вращеніи ихъ въ одномъ и томъ же направленіи, то эти хорды будутъ обертывать коническое сѣченіе, касающееся двухъ данныхъ прямыхъ.

379. *Теорема Шаля.* Шаль въ основаніе своей теоріи коническихъ сѣченій положилъ слѣдующую теорему:

На коническомъ сѣченіи заданы четыре точки a, b, c, d; возьмемъ какую нибудь пятую точку P на коническомъ сѣченіи, не указывая которую именно; тогда, если соединимъ точку P съ точками a, b, c, d прямыми, то при точкѣ P получится пучекъ, ангармоническое отношеніе котораго будетъ постоянно, независимо отъ того, гдѣ бы ни была указана точка P на коническомъ сѣченіи.

Для доказательства предложенной теоремы мы сначала разсмотримъ простѣйшій случай, когда заданное коническое сѣченіе есть кругъ, проходящій черезъ точки a, b, c, d. Въ этомъ случаѣ теорема очевидна, ибо, гдѣ бы ни была взята точка P на кругѣ, пучекъ $(P a b c d)$ четырехъ прямыхъ линій не мѣняетъ своихъ угловъ, а потому понятно, что и ангармоническое его отношеніе не мѣняется при передвиженіи точки P вдоль окружности круга.

Разъ теорема справедлива для круга, то она будетъ справедлива и для всякаго коническаго сѣченія, какъ перспективы круга (см. § 347), ибо въ перспективѣ, какъ частномъ случаѣ гомографической зависимости, ангармоническія отношенія соотвѣтственныхъ элементовъ сохраняются.

380. *Теорема Паппуса.* Четыреугольникъ вписанъ въ коническое сѣченіе; произведеніе разстояній каждой точки кривой до двухъ противоположныхъ сторонъ находится въ постоянномъ отношеніи къ произведенію разстояній той же точки до двухъ другихъ сторонъ.

Разсмотримъ сначала случай круга. Пусть вершины четыреугольника будутъ a, b, c, d. Возьмемъ какую нибудь точку P на кругѣ, не указывая какую именно, обозначимъ длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки P на стороны ab, bc, cd, da черезъ α, β, γ, δ. Соединяя точку P съ вершинами четыреугольника прямыми Pa, Pb, Pc, Pd, получимъ при точкѣ P четыре угла u, v, w, r, стягиваемые сторонами даннаго четыреугольника ab, bc, cd, da. Получаемъ:

$$ab.\,\alpha = Pa.\,Pb \sin u, \quad cd.\,\gamma = Pc.\,Pd \sin w,$$

перемножая, получимъ

$$\alpha.\,\gamma = Pa.\,Pb.\,Pc.\,Pd.\,\frac{\sin u.\,\sin w}{ab.\,cd}.$$

Подобнымъ образомъ

$$\beta.\,\delta = Pa.\,Pb.\,Pc.\,Pd.\,\frac{\sin v.\,\sin r}{bc.\,ad}.$$

Раздѣляя послѣднія равенства одно на другое, получимъ:

$$\frac{\alpha.\gamma}{\beta.\delta}=\frac{\sin u.\ \sin w}{\sin v.\ \sin r}\ \frac{bc.\ ad}{ab.\ cd},$$

но такъ какъ стороны четыреугольника, равно какъ и углы u, v, w, r не мѣняются, то получаемъ, что отношеніе $\frac{\alpha.\gamma}{\beta.\delta}$ равняется нѣкоторому постоянному числу λ.

Теорема Паппуса, будучи доказана для круга, обобщается и на коническія сѣченія, какъ перспективу круга. Въ случаѣ коническаго сѣченія углы u, v, w, r мѣняются, но, на основаніи теоремы Шаля, величина λ остается безъ перемѣны. Теорема Паппуса есть непосредственное слѣдствіе того, что уравненіе коническаго сѣченія, описаннаго около четыреугольника $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\delta=0$, имѣетъ видъ: $\alpha\gamma-\lambda\beta\delta=0$.

381. *Теорема Дезарга.* Прямая линія, пересѣкающая коническое сѣченіе съ вписаннымъ въ него четыреугольникомъ, встрѣчаетъ коническое сѣченіе и противоположныя стороны въ трехъ парахъ точекъ, находящихся въ инволюціонной зависимости.

Возьмемъ коническое сѣченіе, опредѣляемое уравненіемъ $\alpha\beta-\gamma^2=0$ и укажемъ на немъ четыре точки: μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 (см. § 371). Примемъ прямую $\gamma=0$ за сѣкущую. Тогда пучекъ: $\beta-\lambda\alpha=0$ укажетъ на сѣкущей рядъ точекъ. Проведемъ изъ вершины угла $\alpha=0$, $\beta=0$ прямыя къ точкамъ встрѣчи сѣкущей $\gamma=0$ со сторонами заданнаго вписаннаго четыреугольника; на основаніи соображеній § 371, имѣютъ мѣсто уравненія:

$$\mu_1\mu_2.\ \alpha-(\mu_1+\mu_2).\ \gamma+\beta=0,$$
$$\mu_2\mu_3.\ \alpha-(\mu_2+\mu_3).\ \gamma+\beta=0,$$
$$\mu_3\mu_4.\ \alpha-(\mu_3+\mu_4).\ \gamma+\beta=0,$$
$$\mu_4\mu_1.\ \alpha-(\mu_4+\mu_1).\ \gamma+\beta=0.$$

Эти четыре прямыя встрѣчаютъ сѣкущую $\gamma=0$ въ точкахъ встрѣчи этой прямой съ элементами пучка:

$\mu_1\mu_2.\ \alpha+\beta=0,\ \mu_2\mu_3.\ \alpha+\beta=0,\ \mu_3\mu_4.\ \alpha+\beta=0,\ \mu_4\mu_1.\ \alpha+\beta=0.$

Шесть прямыхъ

$$\alpha=0,\quad \beta+\mu_1\mu_2.\ \alpha=0,\quad \beta+\mu_2\mu_3.\ \alpha=0,$$
$$\beta=0,\quad \beta+\mu_3\mu_4.\ \alpha=0,\quad \beta+\mu_4\mu_1.\ \alpha=0,$$

на основаніи соображеній § 78, составляютъ инволюцію, ибо

$$(\mu_1.\mu_2).(\mu_3.\mu_4)=(\mu_2.\mu_3).(\mu_4.\mu_1).$$

382. *Теорема Карно* *). Если коническое сѣченіе пересѣкаетъ стороны AB,

---

*) *Carnot.* Géometrie de position, p. 437.

BC, CA треугольника ABC въ трехъ парахъ точекъ c, c_1, a, a' и b, b', то между отрѣзками, образуемыми этими точками на сторонахъ, существуетъ слѣдующая зависимость

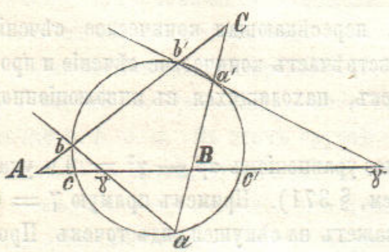
$$\frac{Ab.\,Ab'}{Cb.\,Cb'}\cdot\frac{Ca.\,Ca'}{Ba.\,Ba'}\cdot\frac{Bc.\,Bc'}{Ac.\,Ac'}=1.$$

На основанiи теоремы Менелая (см. § 37) можемъ написать

$$\frac{Ab}{Cb}\cdot\frac{Ca}{Ba}\cdot\frac{B\gamma}{A\gamma}=1,\quad \frac{Ab'}{Cb'}\cdot\frac{Ca'}{Ba'}\cdot\frac{B\gamma'}{A\gamma'}=1.\ \text{(см. черт. 138)}.$$

Перемножая почленно, получаемъ

$$\frac{Ab.\,Ab'}{Cb.\,Cb'}\cdot\frac{Ca.\,Ca'}{Ba.\,Ba'}\cdot\frac{B\gamma.\,B\gamma'}{A\gamma,\,A\gamma'}=1;$$



Черт. 138.

но, на основанiи теоремы Дезарга, имѣемъ

$$\frac{B\gamma.\,B\gamma'}{A\gamma.\,A\gamma'}=\frac{Bc.\,Bc'}{Ac.\,Ac'}.$$

Отсюда видна справедливость высказаннаго въ теоремѣ утвержденiя.

Задачи.

1) Построить коническое сѣченiе по четыремъ его точкамъ и касательной.

Отв. Пусть будутъ a, b, c, d данныя точки; обозначимъ точку касанiя къ заданной касательной черезъ e. Можно будетъ примѣнить теорему Дезарга, принимая касательную за сѣкущую. Пусть будутъ α, α' и β, β' точки, въ которыхъ она встрѣчаетъ противоположныя стороны четыреугольника $abcd$. Эти четыре точки опредѣлятъ на касательной инволюцiю, двойнымъ элементомъ которой будетъ искомая точка e, а потому, если задача возможна, то существуетъ два рѣшенiя, причемъ задача сводится на построенiе коническаго сѣченiя по пяти точкамъ.

2) Построить коническое сѣченiе по четыремъ касательнымъ и одной точкѣ его.

Отв. Коррелативное рѣшенiе на основанiи закона двойственности.

3) Построить коническое сѣченiе по тремъ его точкамъ и двумъ касательнымъ.

Отв. Пусть будутъ a, b, c данныя точки и ot, ot' данныя касательныя, на которыхъ надо указать точки касанiя d, e. Прямая de, на которой каждая изъ точекъ d, e представляетъ двѣ точки безконечно близкiя, замѣняетъ противоположныя стороны четыреугольника вписаннаго, у котораго данныя касательныя суть двѣ другiя стороны. Проведемъ прямую bc; пусть эта прямая пересѣкаетъ касательныя въ точкахъ t и t'. Точка ε, въ которой сѣкущая bc встрѣчаетъ хорду соприкосновенiя de, должна быть, по теоремѣ Дезарга, двойною точкою инволюцiи, въ которой другія попарно сопряженныя точки будутъ bc и tt'. Такимъ образомъ получаемъ двѣ двойныя точки ε и ε' инволюціи на bc. Подобнымъ же образомъ на прямой ab получаются двѣ двойныя точки δ и δ', то даетъ четыре прямыхъ $\varepsilon\delta$, $\varepsilon\delta'$, $\varepsilon'\delta$, $\varepsilon'\delta'$; каждой изъ этихъ прямыхъ соотвѣтствуетъ рѣшеніе задачи, причемъ точки касанія d и e получаются въ пересѣченіи прямой $\varepsilon\delta$ съ данными касательными. Легко убѣдиться, на основаніи свойствъ полнаго четыреугольника, что двойныя точки инволюціи на сторонѣ ac лежатъ на четырехъ указанныхъ прямыхъ линіяхъ и потому задача можетъ имѣть не болѣе четырехъ рѣшеній.

4) Построить коническое сѣченіе по тремъ касательнымъ и двумъ его точкамъ.

Отв. Коррелативное рѣшеніе по закону двойственности.

5) Даны три гомотетическихъ эллипса; провести четвертый гомотетическій эллипсъ, касающійся трехъ заданныхъ.

Отв. Рѣшеніе основано на проектированія рѣшенія аналогичной задачи о кругахъ.

6) Вписать многоугольникъ въ коническое сѣченіе такъ, чтобы его стороны проходили черезъ данныя точки.

Отв. Если примемъ произвольную точку a на коническомъ сѣченіи за вершину многоугольника и составимъ другой, коего бы стороны проходили черезъ данныя точки, то точка z, въ которой послѣдняя сторона пересѣкаетъ коническое сѣченіе, вообще не совпадетъ съ a. Если мы сдѣлаемъ четыре такихъ попытки, то должны имѣть $(a\, a'\, a''\, a''') = (z\, z'\, z''\, z''')$ (гдѣ подъ этитъ символомъ разумѣемъ ангармоническое отношеніе). Теперь, если послѣдняя попытка была успѣшна, то точка a''' совпала съ точкой z''' и задача приводится къ слѣдующей:

«Даны три пары точекъ $aa'a''$, $zz'z''$; найти такую точку k, чтобы $(kaa'a'') = (kzz'z'')$».

Теперь, если сдѣлаемъ a, z'', a', z, a'', z' вершинами вписаннаго шестиугольника (въ данномъ здѣсь порядкѣ, взявъ a и z попеременно такъ, чтобы az, $a'z'$, $a''z''$ могли быть противоположными вершинами), то одна изъ точекъ, въ которыхъ линія, соединяющая точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ съ коническимъ сѣченіемъ, можетъ быть принята за точку k.

Объ алгебраическихъ кривыхъ высшихъ порядковъ.

383. Кривая линія называется *алгебраическою* n-аго порядка, если она опредѣляется уравненіемъ

$$f(x, y) = 0,$$

гдѣ f есть цѣлая функція (полиномъ) n-ой степени относительно координатъ x и y. Общій видъ такого уравненія есть:

$$a_0x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_{n-1} xy^{n-1} + a_n y^n +$$
$$+ b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} y + b_2 x^{n-3} y^2 + \ldots + b_{n-1} y^{n-1} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ g_0 x^3 + g_1 x^2y + g_2 xy^2 + g_3y^3 +$$
$$+ h_0 x^2 + h_1 xy + h_2y^2 + k_0x + k_1y + l_0 = 0.$$

Какъ частные случаи алгебраическихъ линій мы видѣли уже прямую линію, или линію перваго порядка, и коническое сѣченіе, или линію второго порядка.

384. Всякій разъ, когда уравненіе кривой линіи не можетъ быть приведено къ виду, указанному выше, кривая линія называется *трансцендентною*. Напр., линіи $y = sin\ x$, $y = log\ x$.

385. Итакъ, мы получаемъ, какъ обобщеніе всего вышеизложеннаго, теорему, что всякое уравненіе

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

опредѣляетъ нѣкоторую кривую линію и обратно, всякая кривая линія опредѣляется нѣкоторымъ уравненіемъ.

Рѣшая уравненіе (1) относительно y, мы получимъ уравненіе слѣдующаго вида:

$$y = F(x). \tag{2}$$

386. Покажемъ еще болѣе общій и весьма важный способъ заданія кривой линіи.

Координаты точки M кривой, опредѣляемой уравненіемъ (1) или, что тоже, (2) можно на безчисленное число маперовъ выразить въ видѣ функцій отъ нѣкотораго независимаго перемѣннаго t; такъ что различнымъ значеніямъ этого перемѣннаго t будутъ соотвѣтствовать различныя точки кривой. Въ самомъ дѣлѣ, примемъ абсциссу x за совершенно произвольную функцію $\varphi(t)$; такъ что будетъ: $x = \varphi(t)$. Подставляя эту функцію вмѣсто x въ уравненіе (2), мы получимъ: $y = F[\varphi(t)]$. Функцію $F[\varphi(t)]$ обозначимъ для краткости черезъ $\psi(t)$ и тогда кривая линія опредѣлится системою двухъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Какъ примѣръ опредѣленія линіи по послѣднему способу представляется изложенное въ § 173 опредѣленіе точекъ эллипса при помощи эксцентрическаго угла φ.

387. Покажемъ еще одинъ примѣръ. Возьмемъ линію третьяго порядка, опредѣляемую уравненіемъ:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0. \tag{1}$$

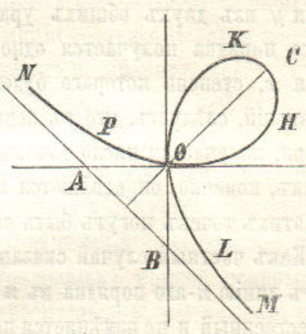
Положимъ $y = tx$; тогда, подставляя это выраженіе y въ уравненіе (1), выразимъ x черезъ t; получается $x = \dfrac{3t}{1 + t^3}$. Отсюда ясно, что $y = \dfrac{3t^2}{1 + t^3}$.

Давая различныя значенія перемѣнному t отъ $-\infty$ до $+\infty$ получимъ

$$\begin{array}{llllll} t \ldots & -\infty, & -1-\varepsilon, & -1+\varepsilon, & 0, +1, & +\infty \\ x \ldots & 0, & +\infty, & -\infty, & 0, +\dfrac{3}{2}, & 0 \\ y \ldots & 0, & -\infty, & +\infty, & 0, +\dfrac{3}{2}, & 0, \end{array}$$

(ε — положительная безконечно-малая величина).

Кривая имѣетъ видъ, показанный на чертежѣ 139 и называется Декартовымъ листомъ (Folium Decarti). При измѣненіи t отъ 0 до $+\infty$ черезъ положительныя возрастающія значенія, соотвѣтственная точка описываетъ листообразную вѣтвь $OHCKO$ кривой въ направленіи, обратномъ движенію часовой стрѣлки, причемъ $t=+1$ соотвѣтствуетъ вершина листка C; половинѣ этого листка соотвѣтствуютъ значенія t, меньшія единицы, другой половинѣ—большія. Кривая имѣетъ кромѣ того двѣ удаляющіяся въ безконечность вѣтви OLM и OPN, асимптотически приближающіяся къ прямой AB, имѣющей уравненіе: $x+y+1=0$, причемъ при движеніи точки L по одной вѣтви, начиная отъ начала координатъ и удаляясь по направленію M, соотвѣтственныя значенія для t будутъ отрицательныя, по численной величинѣ большія 1 и измѣняющіяся отъ $-\infty$ до -1, причемъ значенію -1 соотвѣтствуетъ безконечно далекая точка. При движеніи же точки P отъ начала координатъ въ направленіи N по другой безконечной вѣтви, t мѣняется отъ 0 до -1.



Черт. 139.

388. Изъ послѣдняго примѣра видно, съ какимъ удобствомъ изучаются кривыя линіи, если онѣ заданы системой уравненій $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Въ особенности, если функціи φ и ψ однозначныя; тогда каждому значенію t соотвѣтствуетъ одна опредѣленная точка кривой. Folium Decarti даетъ примѣръ кривой линіи послѣдняго вида, ибо координаты точки на немъ выражаются помощью дробныхъ раціональныхъ функцій отъ t. Кривыя линіи, опредѣляемыя уравненіями, въ которыхъ функціи φ и ψ раціональныя, называются *уникурсальными*.

389. Посмотримъ теперь, сколько нужно задать точекъ для опредѣленія кривой n-аго порядка. Всѣхъ членовъ въ общемъ уравненіи линіи n-аго порядка

$$\frac{(n+1).\,(n+2)}{1.\,2}=N,$$

ибо это число есть сумма натуральныхъ чиселъ $n+1, n, n-1, \ldots 2, 1$, такъ какъ въ этомъ общемъ уравненіи членовъ n-ой степени $n+1$, $n-1$ степени n и т. д. Слѣдовательно, всего коэффиціентовъ $\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}$. Черезъ раздѣленіе на одинъ изъ коэффиціентовъ уравненія кривой мы приведемъ уравненіе къ виду, заключающему $N-1$ параметровъ. Слѣдовательно, для опредѣленія кривой линіи n-аго порядка необходимо задать $N-1$ точекъ, черезъ которыя должна проходить эта кривая; такъ что говорятъ, что кривая линія n-аго порядка опредѣляется

$$N-1=\frac{n(n+3)}{1.2}$$

точками.

390. На основаніи теоремы Безу *), гласящей, что въ результатѣ исключенія y изъ двухъ общихъ уравненій двухъ алгебраическихъ кривыхъ m-аго и n-аго порядка получается одно алгебраическое уравненіе $\Omega(x)=0$ для опредѣленія x, степень котораго будетъ равна произведенію mn степеней заданныхъ уравненій, слѣдуетъ, что въ пересѣченіи двухъ алгебраическихъ кривыхъ, вообще говоря, получается число точекъ, равное произведенію порядковъ. Абсциссы этихъ точекъ, конечно, опредѣляются изъ уравненія $\Omega(x)=0$. Понятно, что нѣкоторыя изъ этихъ точекъ могутъ быть совпадающими, мнимыми или безконечно далекими.

Какъ частный случай сказаннаго является теорема, что прямая линія пересѣкаетъ линію n-аго порядка въ n точкахъ. Порядокъ кривой линіи есть признакъ существенный и не измѣняется ни отъ преобразованія координатъ, ни отъ проектированія, что слѣдуетъ изъ того, что формулы преобразованія координатъ, а также формулы, выражающія гомографическую зависимость, не мѣняютъ степени уравненія алгебраической кривой, въ чемъ не трудно убѣдиться.

391. *Парадоксъ Крамера.* Линіи третьяго порядка могутъ пересѣкаться въ девяти точкахъ; и въ то же время девять точекъ вполнѣ опредѣляютъ линію третьяго порядка.

Чтобы разъяснить этотъ кажущійся парадоксъ, будемъ разсуждать такъ. Возьмемъ какія нибудь восемь изъ девяти точекъ, общихъ двумъ линіямъ третьяго порядка: $S=0$ и $S_1=0$. Ясно, что черезъ эти восемь точекъ можно провести безчисленное множество линій третьяго порядка, составляющихъ пучекъ: $S-k\,S_1=0$. Если мы захотимъ провести ту кривую третьяго порядка изъ принадлежащихъ пучку, которая бы проходила черезъ нѣкоторую девятую точку x_0, y_0, то для этой цѣли придется подставить координаты x_0, y_0 въ уравненіе пучка и опредѣлить изъ него соотвѣтствующія значенія коэффиціента k. Получаемъ: $k=\frac{S^0}{S_1{}^0}$, гдѣ S^0 и $S_1{}^0$, представляютъ результаты подстановки x_0 и y_0 въ функціи S и S_1. Среди точекъ пересѣченія остается еще одна, девятая, точка, которую мы не разсматривали. Пусть

*) Théorie générale des equations algébriques par Bézout. 1779.

координаты ея будутъ x_1, y_1. Всякій разъ, когда мы за девятую точку принимаемъ какую нибудь точку x_0, y_0, отличную отъ точки x_1, y_1, мы получаемъ для k вполнѣ опредѣленное значеніе и кривая третьяго порядка опредѣляется такими девятью точками вполнѣ. Если же за девятую точку примемъ x_1, y_1, тогда $S^0 = 0$ и $S_1{}^0 = 0$ и число k остается неопредѣленнымъ. Черезъ подобныя девять точекъ проходитъ множество линій третьяго порядка—всѣ линіи заданнаго пучка.

Итакъ мы видимъ, что уравненіе $S - k\,S_1 = 0$ представляетъ пучекъ линій третьяго порядка, проходящихъ черезъ девять точекъ, общихъ двумъ линіямъ $S = 0$ и $S_1 = 0$.

Произвольная система девяти точекъ опредѣляетъ, вообще говоря, одну только линію третьяго порядка, но между положеніемъ заданныхъ девяти точекъ можетъ существовать такая зависимость, что черезъ эти 9 точекъ можно провести не одну только линію, а цѣлый пучекъ. Двѣ произвольныя линіи третьяго порядка всегда даютъ въ пересѣченіи систему девяти точекъ, обладающихъ послѣднимъ свойствомъ. Разсужденія, при помощи которыхъ мы объяснили парадоксъ Крамера, прилагаются также къ кривымъ порядковъ болѣе высокихъ.

392. Построеніе кривой линіи, опредѣленной уравненіемъ $f(x, y) = 0$, есть не что иное, какъ графическое изображеніе закона измѣненія вещественной функціи y независимаго перемѣннаго x при непрерывномъ измѣненіи независимаго перемѣннаго, а потому, будетъ ли функція y задана уравненіемъ кривой неявнымъ образомъ, или же явно, черезъ рѣшеніе уравненія относительно y, мы можемъ, задавая разныя значенія x, получать соотвѣтственныя значенія y и такимъ образомъ строить сколько угодно точекъ кривой. Чѣмъ больше точекъ будетъ построено, тѣмъ лучше выяснится фигура кривой линіи, опредѣляемой уравненіемъ.

Такой способъ изученія кривой линіи совершенно недостаточенъ. Прежде всего тутъ приходится считаться съ затрудненіями характера алгебраическаго; такъ, напримѣръ, въ случаѣ высокой степени уравненія, а въ особенности при кривыхъ трансцендентныхъ, когда вычисленіе каждой ординаты представляется затруднительнымъ, а потому вычислять большое число ихъ является требованіемъ весьма неудобнымъ.

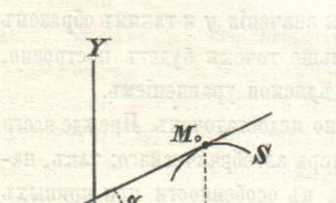
Мало того, мы можемъ вычислить рядъ достаточно близкихъ ординатъ и все-таки для промежуточныхъ значеній x кривая можетъ имѣть безконечныя вѣтви, которыя мы при такомъ способѣ можемъ совсѣмъ упустить изъ вида. А потому является вопросомъ первостепенной важности—прежде вычисленія отдѣльныхъ ординатъ ознакомиться вообще съ видомъ кривой линіи, причемъ не пропустить никакихъ особенностей фигуры, напр., въ родѣ безконечныхъ вѣтвей фигуры, если онѣ существуютъ.

При такомъ изученіи кривой линіи нужно искать пріемы, дающіе возможность замѣтить общій характеръ кривой изъ наименьшаго числа выкладокъ и тогда является важнымъ, если нельзя обойтись безъ вычисленія ординатъ, то ходъ разсужденія вести такъ, чтобы понадобилось вычислить возможно меньше такихъ ординатъ, т. е. другими словами, вычислить положеніе точекъ, наиболѣе характеризующихъ видъ кривой.

393. Общіе пріемы, дающіе возможность изучать видъ кривыхъ линій, связаны съ пріемами изученія общихъ свойствъ функцій, т. е. съ дифференціальнымъ исчисленіемъ.

Прежде всего является необходимымъ убѣдиться, возрастаетъ или убываетъ ордината y при увеличеніи x въ промежуткѣ отъ a до b, гдѣ a и b нѣкоторыя числа. Этотъ вопросъ получаетъ отвѣтъ въ дифференціальномъ исчисленіи, причемъ разсматривается производная $F'(x)$, гдѣ $y = F(x)$ и все дѣло зависитъ отъ знака этой производной: если производная сохраняетъ для этого промежутка знакъ $+$, то $F(x)$ возрастаетъ въ этомъ промежуткѣ, а если знакъ $-$, то она убываетъ. Если производная мѣняетъ знакъ, напримѣръ, изъ положительной становится отрицательной, то ордината перестаетъ возрастать и начинаетъ убывать, слѣдовательно, она проходитъ черезъ наибольшую (изъ сосѣднихъ) величину. Если, наоборотъ, производная изъ отрицательной дѣлается положительной при переходѣ x черезъ значеніе x_0 (отъ меньшихъ къ большимъ), то ордината при $x = x_0$ перестаетъ уменьшаться и начинаетъ увеличиваться; слѣдовательно, проходитъ черезъ наименьшую величину (изъ сосѣднихъ).

Вообще, если производная, оставаясь конечною и непрерывною, мѣняетъ знакъ, переходя черезъ нуль, то касательныя, проведенныя въ точкахъ, ординаты которыхъ наибольшія или наименьшія, параллельны оси x.



Черт. 140.

394. Замѣтимъ, что не всякое значеніе x, обращающее производную въ нуль, опредѣляетъ наименьшія или наибольшія ординаты.

Нужно изслѣдовать, мѣняетъ ли дѣйствительно производная свой знакъ; но во всякомъ случаѣ касательная будетъ параллельна оси x.

Что касается точекъ M_0, соотвѣтствующихъ абсциссѣ x_0, для которой $F'(x_0) = a$, гдѣ a нѣкоторое число, отличное отъ нуля, то это число a, какъ показывается въ дифференціальномъ исчисленіи, есть не что иное, какъ tg угла α, составляемаго касательною MT съ осью x-овъ; такъ что, когда $F'(x_0) = \infty$, то касательная параллельна оси y-овъ.

395. Вотъ тѣ свѣдѣнія, которыя мы будемъ считать извѣстными изъ дифференціальнаго исчисленія. Что касается изученія кривизны линіи въ различныхъ точкахъ и направленія выпуклости и вогнутости около разныхъ точекъ, то эти вопросы мы оставимъ при нашемъ изученіи кривыхъ въ сторонѣ, отсылая читателя къ курсамъ дифференціальнаго исчисленія.

Затѣмъ весьма важно замѣтить, не обращается ли для какихъ нибудь значенiй x ордината y въ безконечность, или не становится ли эта ордината мнимою.

Вотъ тѣ основныя задачи, которыя прежде всего являются при разсмотрѣнiи графическаго изображенiя функцiй.

396. Изъ всего сказаннаго ясно, какую роль при изученiи кривыхъ линiй играетъ производная. Если функцiя y дана не явно уравненiемъ

$$f(x, y) = 0, \qquad (1)$$

то, чтобы найти производную $\frac{dy}{dx}$, нужно дифференцировать уравненiе (1). Дифференцируя получаемъ:

$$f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy = 0,$$

гдѣ $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ суть частныя производныя отъ $f(x, y)$, взятыя по x и по y.

Отсюда получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)};$$

такъ что, если возьмемъ какую нибудь точку $M_0\ (x_0, y_0)$ на кривой, заданной уравненiемъ (1), такъ что будетъ:

$$f(x_0, y_0) = 0 \qquad (2)$$

то мы получимъ для tg угла, который составляетъ касательная съ осью x-овъ, выраженiе:

$$-\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

Итакъ мы видимъ, что подставляя числа x_0, y_0 въ частныя производныя и производя дѣленiе, мы получимъ нѣкоторое опредѣленное число, которое и будетъ tg-омъ угла искомой касательной.

Такъ будетъ опредѣляться касательная вообще для всѣхъ точекъ кривой линiи.

397. Существуютъ у нѣкоторыхъ кривыхъ линiй такъ называемыя *особенныя точки*, когда сказанная процедура не приводитъ къ результату.

Имѣется въ виду указать на случай, когда въ результатѣ подстановки чиселъ x_0, y_0 въ частныя производныя $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ получаются нули, т. е. когда обѣ производныя заразъ уничтожаются для значенiй x_0, y_0.

Итакъ мы видимъ, что координаты особенныхъ точекъ опредѣляются тремя уравненiями:

$$f(x, y) = 0, \quad f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0.$$

Такъ какъ, вообще говоря, систему трехъ уравненiй нельзя рѣшить относительно двухъ неизвѣстныхъ, то и не всякая кривая линiя имѣетъ особенныя точки.

Для того, чтобы кривая имѣла особенныя точки, необходимо, чтобы указанныя три уравненія были совмѣстны, другими словами, необходимо, чтобы значенія x_0, y_0, опредѣленныя изъ двухъ изъ числа ихъ, удовлетворяли также третьему.

Мы имѣли уже примѣръ особенной точки въ декартовомъ листѣ. Для этой кривой начало координатъ представляетъ особенную точку. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ всѣ три уравненія

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0,\quad f'_x(x,y) = 3x^2 - 3ay = 0,$$
$$f'_y(x,y) = 3y^2 - 3ax = 0$$

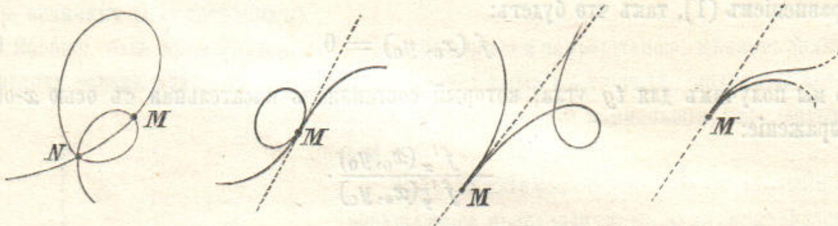
удовлетворяются значеніями:

$$x = 0,\ y = 0.$$

Особенныя точки представляютъ весьма важный элементъ при изученіи вида кривыхъ линій, такъ что можно выразиться, что одной изъ главнѣйшихъ задачъ при изученіи кривыхъ является разсмотрѣніе такихъ точекъ и безконечныхъ вѣтвей.

398. Особенныя точки имѣютъ слѣдующіе характерные виды.

1. *Кратныя точки* (см. черт. 141). Точки, въ которыхъ встрѣчаются нѣсколько вѣтвей кривой линіи. Напр. точка M двойная, а точка N тройная. Въ



Черт. 141. Черт. 142. Черт. 143. Черт. 144.

кратныхъ точкахъ каждая изъ вѣтвей можетъ имѣть особенную касательную. Такъ напримѣръ, декартовъ листъ имѣетъ въ началѣ координатъ касательными двѣ оси координатъ.

Иногда касательныя кратныхъ точекъ могутъ совпадать, какъ это показано на черт. 142.

2. *Точки возврата*. Такъ называются точки, въ которыхъ двѣ вѣтви кривой имѣютъ общую касательную, причемъ обѣ вѣтви лежатъ по одну сторону точки касанія, по другую же сторону не существуетъ дѣйствительныхъ точекъ кривой. Въ виду этого характера расположенія вѣтвей точки возврата называются иногда *точками заостренія*.

Эти точки раздѣляются на два рода: точки возврата 1-го рода, въ которыхъ вѣтви кривой вблизи точки касанія лежатъ по разныя стороны касательной (см. черт. 143) и точки возврата 2-го рода (rébroussement en bec), въ которыхъ вѣтви кривой вблизи точки касанія лежатъ по одну сторону касательной (см. черт. 144).

3. *Уединенныя точки.* (Points isolés). Такъ называется дѣйствительная точка кривой, не имѣющая дѣйствительныхъ безконечно близкихъ точекъ лежащихъ на кривой. (См. черт. 145).

399. Трансцендентныя кривыя имѣютъ особенныя точки еще двухъ видовъ:

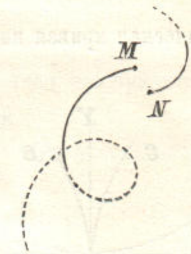
4. *Точки угловыя.* (См. черт. 146).

5. *Точки перерыва.* (См. черт. 147).

400. Что касается безконечныхъ вѣтвей, то мы ихъ будемъ раздѣлять на *ги-*

Черт. 145.

Черт. 146.



Черт. 147.

перболическія (см. черт. 148), имѣющія прямолинейныя асимптоты, и *параболическія*, не имѣющія оныхъ (см. черт. 149).

401. Кромѣ указанныхъ выше особенностей, кривыя линіи, называемыя *спиралями*, могутъ имѣть еще слѣдующія особенности:

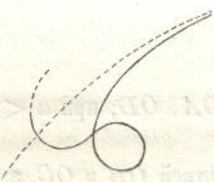
1. *Асимптотическая точка.* (См. черт. 150).

2. *Асимптотическая замкнутая кривая* (см. черт. 151).

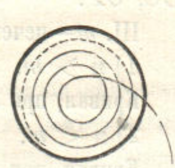
Примѣры этихъ послѣднихъ особенностей увидимъ ниже.

402. При разсмотрѣніи кривыхъ линій около особенныхъ точекъ, а также без-


Черт. 148.


Черт. 149.


Черт. 150.


Черт. 151.

конечныхъ вѣтвей намъ придется сравнивать кривыя линіи съ такъ называемыми параболами и гиперболами высшихъ порядковъ, къ изученію которыхъ мы теперь переходимъ.

Начнемъ съ параболическихъ кривыхъ, опредѣляемыхъ уравненіемъ: $y^m = ax^n$, гдѣ m и n цѣлыя и положительныя числа.

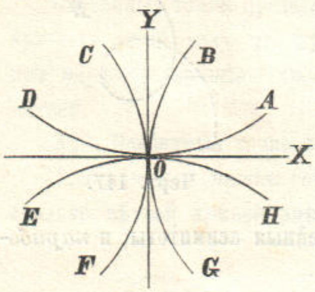
Замѣтимъ прежде всего слѣдующее:

$$y = \sqrt[m]{a}.x^{\frac{n}{m}}.$$

Дифференцируя, получимъ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{n}{m}\sqrt[m]{a}\,x^{\frac{n-m}{m}}.$$

Отсюда мы замѣчаемъ, что, если $n > m$, то, при $x = 0$ и $\frac{dy}{dx} = 0$ и, слѣдовательно, касательная совпадаетъ съ осью x-овъ; если же $n < m$, то, при $x = 0$ $\frac{dy}{dx} = \infty$ и касательная совпадаетъ съ осью y-овъ. Отсюда мы видимъ, что параболическая кривая касается оси x-овъ при $n > m$, и оси y-овъ при $n < m$.



Черт. 152.

I. m—четное, n—четное.

1) $n > m$ $\qquad a > o$.

Кривая состоитъ изъ вѣтвей OA, OD, OE, OH. (см. черт. 152).

2) $n < m$ $\qquad a > o$.

Кривая состоитъ изъ вѣтвей OB, OC, OF, OG.

II. m—четное, n—нечетное.

1) $n > m$.

Кривая, при $a > o$, имѣетъ дѣйствительныя точки только при положительныхъ x; слѣдовательно, состоитъ изъ вѣтвей: OA и OH. Въ началѣ координатъ имѣетъ точку возврата. Подобнымъ же образомъ, при $a < o$, состоитъ изъ вѣтвей OD, OE. Въ началѣ координатъ также точка возврата.

2) $n < m$.

Кривая, при $a > o$, состоитъ изъ вѣтвей OB, OG; при $a < o$, изъ вѣтвей OC, OF.

III. m—нечетное, n—четное.

1) $n > m$.

Кривая, при $a > o$, имѣетъ вѣтви OA, OD; при $a < o$, вѣтви OE, OH.

2) $n < m$.

Кривая, при $a > o$, состоитъ изъ вѣтвей OB и OC, а при $a < o$, изъ вѣтвей OF, OG. Въ обоихъ случаяхъ начало координатъ есть точка возврата.

IV. m—нечетное, n—нечетное.

1) $n > m$.

Кривая, при $a > o$, состоитъ изъ вѣтвей OA и OE; при $a < o$, изъ вѣтвей OH и OD.

2) $n < m$.

Кривая, при $a > o$, имѣетъ вѣтви OB и OF, а при $a < o$, вѣтви OC и OG. Въ послѣднихъ четырехъ случаяхъ начало координатъ есть такъ называемая *точка перегиба*.

Что касается безконечныхъ вѣтвей этихъ кривыхъ, то положеніе ихъ относительно осей координатъ указывается наглядно чертежомъ.

403. Обращаемся теперь къ кривымъ гиперболическимъ, опредѣляемымъ уравненіемъ:

$$y^m \,.\, x^n = a,$$

гдѣ m и n числа цѣлыя и положительныя.

Рѣшая это уравненіе относительно y, получаемъ:

$$y = \sqrt[m]{a}\, x^{-\frac{n}{m}}.$$

По мѣрѣ увеличенія численной величины x, y убываетъ, такъ что при $x = \infty$, $y = 0$—и ось x-овъ есть не что иное, какъ асимптота кривой.

Подобнымъ же образомъ, при увеличеніи y, x убываетъ и при $y = \infty$, $x = 0$, такъ что ось y-овъ есть тоже асимптота кривой.

1) m—четное, n—четное.

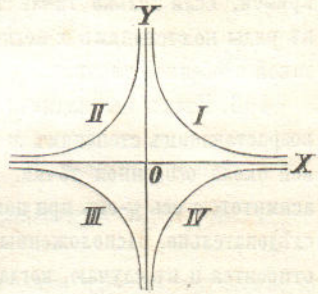
Кривая, при $a > o$, состоитъ изъ четырехъ вѣтвей I, II, III, IV (см. черт. 153); при $a < o$ гипербола мнимая.

2) m—четное, n—нечетное.

Кривая, при $a > o$, состоитъ изъ вѣтвей I и IV; а при $a < o$, изъ вѣтвей II и III.

3) m—нечетное, n—четное.

Кривая, при $a > o$, состоитъ изъ вѣтвей I и II, а при $a < o$, изъ вѣтвей III и IV.



Черт. 153.

4) m—нечетное, n—нечетное.

Кривая, при $a > o$, состоитъ изъ вѣтвей I и III; при $a < o$, изъ вѣтвей II и IV.

Параллелограммъ Ньютона.

404. Въ знаменитомъ своемъ трудѣ: Methodus fluxionum et serierum infinitarum cum ejusdem applicatione ad curvarum geometriam Ньютонъ далъ замѣчательное правило, извѣстное подъ названіемъ аналитическаго параллелограмма, дающее возможность изслѣдовать алгебраическія кривыя при помощи разложенія функціи y, удовлетворяющей уравненію алгебраической кривой, въ рядъ по степенямъ x.

Уже въ 50-мъ году прошлаго столѣтія правило Ньютона послужило основаніемъ прекрасной теоріи алгебраическихъ кривыхъ, изложенной Крамеромъ въ сочиненіи: Introduction à l'analyse des lignes courbes algebriques (Genève, 1750).

Правило это затѣмъ представлено Лагранжемъ въ замѣчательно простомъ и изящномъ аналитическомъ видѣ и примѣнено къ разложенію въ непрерывныя дроби рѣшеній нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненій. Тоже правило лежитъ въ основаніи классической работы Puiseux объ алгебраическихъ функціяхъ.

405. Итакъ, возьмемъ уравненіе алгебраической линіи

$$f(x, y) = 0.$$

Мы покажемъ, какъ разлагать функцію y въ ряды по раціональнымъ степенямъ x, при чемъ для малыхъ значеній x разложеніе должно быть произведено по возрастающимъ степенямъ x, при большихъ же значеніяхъ x по степенямъ убывающимъ.

Если при $x=0$ также будетъ равняться нулю и y, то тогда начало координатъ лежитъ въ нѣкоторой точкѣ на заданной алгебраической кривой и тогда разложеніе y по возрастающимъ степенямъ x дастъ возможность вычислять y при малыхъ значеніяхъ x и, слѣдовательно, полученный рядъ опредѣлитъ вѣтвь кривой вблизи начала координатъ.

Понятно, что лучше всего помѣстить начало координатъ въ особенную точку кривой, если только такая точка существуетъ. Тогда при помощи разложенія y въ ряды по степенямъ x легко разсмотрѣть, какъ расположены вѣтви кривой около такой особенной точки.

406. Итакъ мы видимъ, что разложеніе алгебраической функціи въ ряды по возрастающимъ степенямъ x даетъ возможность изучать видъ алгебраической кривой около особенной точки. Подобнымъ же образомъ изучаются вѣтви, имѣющія асимптотою ось y-овъ при помощи рядовъ, справедливыхъ для малыхъ значеній x, слѣдовательно, расположенныхъ по восходящимъ степенямъ x. Конечно, тоже самое относится и къ случаю, когда асимптота параллельна оси y-овъ. Во всѣхъ другихъ случаяхъ при изученіи безконечныхъ вѣтвей приходится разлагать алгебраическую функцію y въ ряды, имѣющіе мѣсто для большихъ значеній x, т. е. въ ряды расположенные по отрицательнымъ степенямъ x, возрастающимъ, впрочемъ, по абсолютной величинѣ.

407. Легко видѣть, что разсмотрѣніе разложеній, имѣющихъ мѣсто для большихъ значеній x, приводится къ разсмотрѣнію разложеній по возрастающимъ степенямъ x, имѣющихъ, слѣдовательно, мѣсто для малыхъ значеній x, если мы замѣнимъ въ алгебраическомъ уравненіи заданной кривой x на $\frac{1}{x}$; тогда по уничтоженіи дробныхъ членовъ умноженіемъ всего выраженія на нѣкоторую степень x, мы получимъ новое алгебраическое уравненіе, корень котораго y придется разлагать по возрастающимъ степенямъ x.

Чтобы перейти отъ полученнаго такимъ образомъ разложенія по возрастающимъ степенямъ x къ требуемому разложенію по убывающимъ степенямъ корня первоначальнаго уравненія, достаточно замѣнить x на $\frac{1}{x}$.

408. Итакъ мы видимъ, что, какъ разсмотрѣніе особенныхъ точекъ, такъ и разсмотрѣніе безконечныхъ вѣтвей можно свести на разложеніе алгебраическихъ функцій въ ряды по возрастающимъ степенямъ x. Пусть начало координатъ пере-

несено въ особенную точку, имѣющую координаты

$$x = h,\ y = k.$$

Преобразованіе координатъ мы сдѣлаемъ по формуламъ:

$$x = h + \xi,\ y = k + \eta.$$

Подставляя эти значенія x и y въ уравненіе алгебраической кривой, получимъ

$$f(h + \xi,\ k + \eta) = 0.$$

Раскрывая скобки и дѣлая приведеніе, мы приведемъ уравненіе окончательно къ виду:

$$f_1(\xi, \eta) = 0,$$

гдѣ f_1 есть цѣлая функція отъ ξ, η (полиномъ), не заключающая члена, независящаго отъ координатъ ξ и η, ибо при $\xi = 0$ и η должна равняться нулю.

409. Итакъ, мы привели вопросъ къ разсмотрѣнію уравненія

$$f(x, y) = 0,$$

гдѣ $f(x, y)$ есть функція такого вида:

$$f(x,y) = \Sigma\, ax^m y^n = a_0 x^{m_0} y^{n_0} + a_1 x^{m_1} y^{n_1} + a_2 x^{m_2} y^{n_2} + \dots \qquad (1)$$

гдѣ $a_0, a_1, a_2, \dots$ суть нѣкоторые численные коэффиціенты, а $m_0, n_0, m_1, n_1, \dots$ числа цѣлыя и положительныя.

Заразъ оба показателя надъ x и y ни въ одномъ изъ членовъ уравненія не должны быть равны нулю, ибо къ такимъ уравненіямъ, гдѣ это имѣетъ мѣсто, мы и привели разсмотрѣніе вопроса.

410. Ясно, что для $x = 0$, y долженъ тоже равняться нулю. Будемъ теперь искать разложеніе функціи y въ рядъ слѣдующаго вида:

$$y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \dots,$$

гдѣ $A, B, C, D, \dots$ нѣкоторыя алгебраическія числа, а $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ суть нѣкоторыя раціональныя числа, причемъ $o < \alpha < \beta < \gamma < \delta < \dots$

Главнѣйшею задачей при отысканіи такихъ разложеній является нахожденіе перваго показателя α.

Посмотримъ, къ чему такая задача приведется. Введемъ обозначеніе:

$$y = x^\alpha S, \qquad (2)$$

гдѣ

$$S = A + Bx^{\beta_1} + Cx^{\gamma_1} + Dx^{\delta_1} + \dots,$$

гдѣ

$$\beta_1 = \beta - \alpha,\ \gamma_1 = \gamma - \alpha,\ \delta_1 = \delta - \alpha \dots$$

причемъ всѣ числа $\beta_1, \gamma_1, \delta_1, \dots$ положительныя.

Подставляемъ выраженіе (2) въ уравненіе (1). Получимъ

$$a_0\, S^{n_0} x^{\mu_0} + a_1\, S^{n_1} x^{\mu_1} + a_2\, S^{n_2} x^{\mu_2} + \ldots = 0,$$

гдѣ

$$\mu_0 = m_0 + \alpha n_0,\ \mu_1 = m_1 + \alpha n_1,\ \mu_2 = m_2 + \alpha n_2 \ldots$$

Положимъ, что число α выбрано какъ нибудь, причемъ такъ, что вышло $\mu_0 < \mu_1$; $\mu_0 < \mu_2$,—то есть μ_0 меньше всѣхъ остальныхъ μ. Тогда, дѣля все уравненіе на x^{μ_0}, получимъ:

$$a_0\, S^{n_0} + a_1\, S^{n_1} x^{\mu_1 - \mu_0} + a_2\, S^{n_2} x^{\mu_2 - \mu_0} + \ldots = 0. \tag{3}$$

Послѣднее уравненіе должно быть тождествомъ, если рядъ для y найденъ правильно. Въ тождествѣ же мы имѣемъ право вставлять вмѣсто входящихъ въ него буквъ любыя численныя значенія, въ результатѣ получимъ опять тождество.

Подставляя въ послѣднее тождество вмѣсто x нуль, мы получимъ, замѣчая, что S обращается въ A при $x = 0$,

$$a_0\, A^{n_0} = 0,$$

но такъ какъ a_0 не $= 0$, то получаемъ: $A = 0$.

Итакъ мы видимъ, что члена съ показателемъ α такимъ, какимъ мы его предположили, не существуетъ.

Показатель α долженъ быть таковъ, что по крайней мѣрѣ два изъ выраженій μ должны выходить одинаковыми и меньшими всѣхъ остальныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что эти равныя и меньшія μ суть μ_0 и μ_1. Тогда

$$m_0 + \alpha n_0 = m_1 + \alpha n_1,$$

откуда получаемъ для α значеніе

$$\alpha = \frac{m_0 - m_1}{n_1 - n_0}.$$

Въ этомъ случаѣ тождество (3) по раздѣленіи на x^{μ_0} обращается въ такое:

$$a_0\, S^{n_0} + a_1\, S^{n_1} + a_2\, S^{n_2} x^{\mu_2 - \mu_0} + a_3\, S^{n_3} x^{\mu_3 - \mu_0} + \ldots = 0.$$

Полагая въ послѣднемъ тождествѣ $x = 0$, получаемъ:

$$a_0\, A^{n_0} + a_1\, A^{n_1} = 0,$$

откуда находимъ:

$$A = \sqrt[n_1 - n_0]{-\frac{a_0}{a_1}}$$

и, слѣдовательно, опредѣлился коэффиціентъ A перваго члена нашего разложенія.

411. Итакъ мы видимъ, что вопросъ опредѣленія перваго показателя ряда сводится къ слѣдующему аналитическому вопросу: